1回目

2020年4月4日　18:18

教科書：松本幸夫「多様体の基礎」，松島与三「多様体入門」

おすすめ

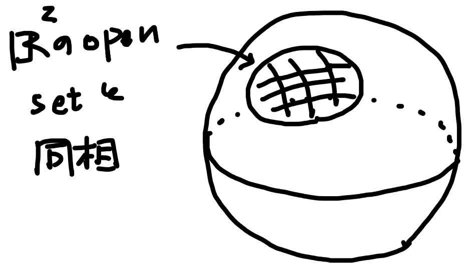
評価：　レポート(+期末試験?)　　　　予備知識：線形，微積，集合と位相

多様体とは？　局所的に $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な位相空間.

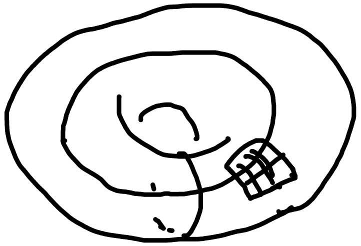
座標がとれる

例　$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

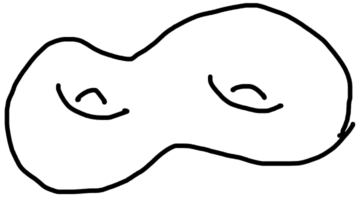
(2次元)球面



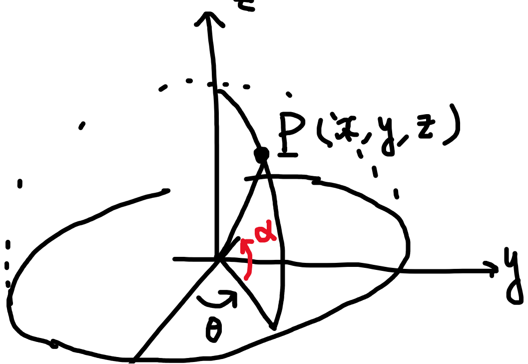
例　トーラス T^2　(ドーナツの表面)



例　種数2の曲面(二人乗りの浮き輪の表面)

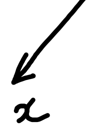


S^2の座標の例



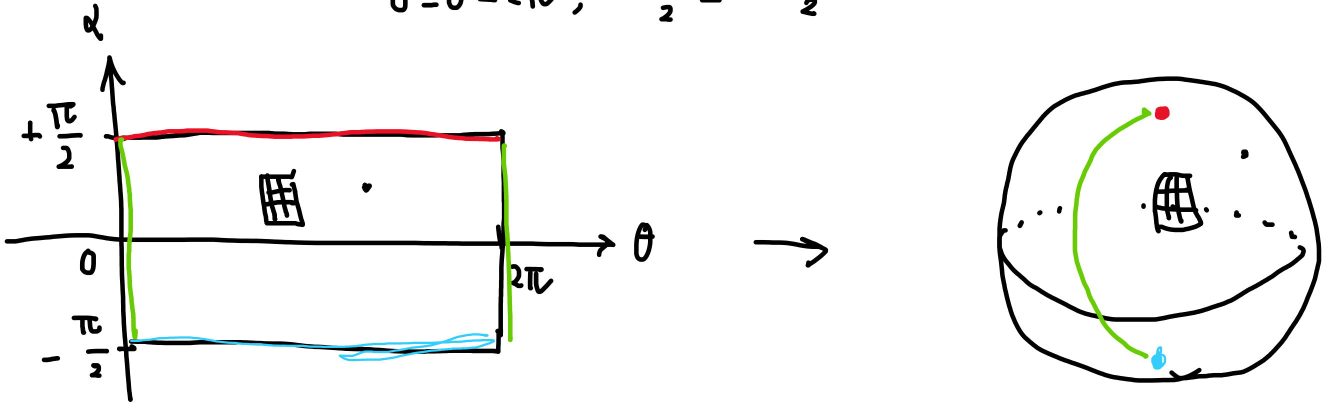
$$\left.\begin{array}{l} \theta : 経度 \\ \alpha : 緯度 \end{array}\right\} 座標.$$

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cos\theta \\ y = \cos\alpha \sin\theta \end{cases}$$



$z = \sin\alpha$

$0 \le \theta \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

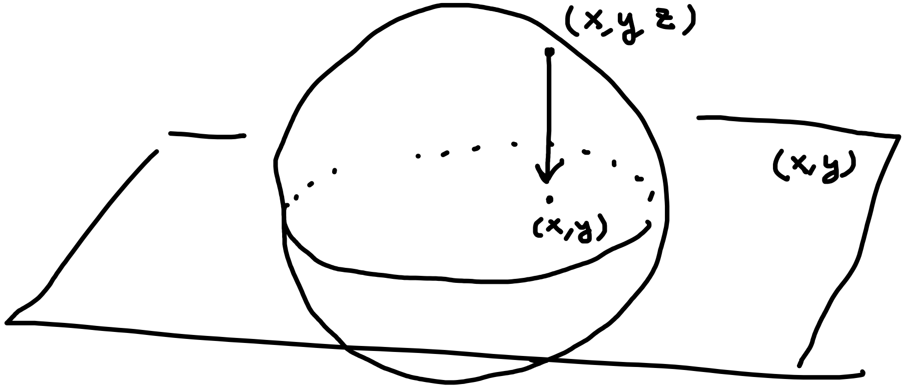


北極，南極の近くでは一対一の良い座標になっていない．

北半球上の座標

↑
(z>0 に制限)

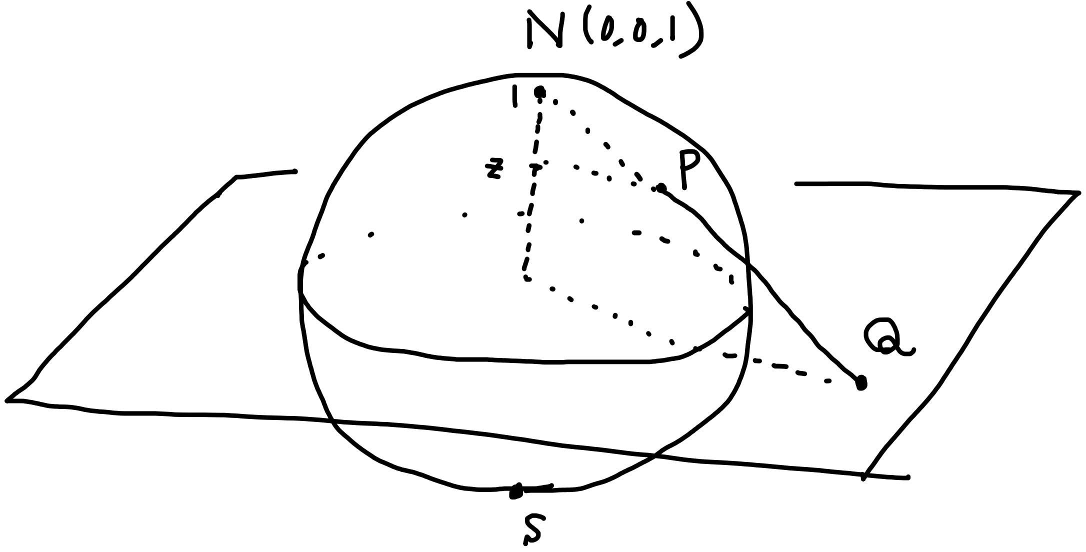
(x,y) 平面への射影により座標を入れる．



$$\begin{array}{ccc} S^2 \cap \{z>0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

逆写像は $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \longmapsfrom (x,y)$

立体射影(stereographic projection)



$P \in S \setminus \{N\}$

Q : NP と (x,y) 平面の交わり

$P(x, y, z)$

$Q\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$

$$\begin{tikzcd} S^2 \setminus \{N\} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{R}^2 \\ P \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[r, mapsto] & Q \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

演習問題：この写像の逆写像を求めよ．また同相写像であることを示せ．

(南極からの立体射影も同様に定義できます．)

位相空間 の復習

- $\mathbb{R}^n$ の位相： $A \subset \mathbb{R}^n$ が open set（開集合）

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall p \in A \quad {}^\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B_\varepsilon(p) \subset A$$

但し $B_\varepsilon(p) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \; |x-p| < \varepsilon \}$

（p 中心 半径 ε の球体）

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$　　$\mathcal{O}$: X の open set のあつまり

$\mathcal{O} \subset P(X)$　　↑ いくつかの性質をもつ

- **相対位相**　$(X, \mathcal{O}_X)$ 位相空間, $A \subset X$ 部分集合

$$\mathcal{O}_A = \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}$$

は A の位相を定める. 相対位相という.

- $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間

$f : X \to Y$ が連続 $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall U \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

$f : X \to Y$ が同相 (homeomorphism)

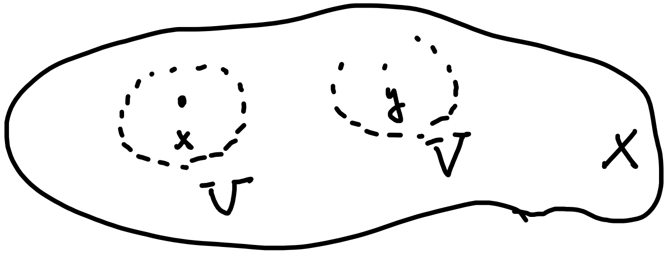
$\underset{\text{def.}}{\iff}$ f は全単射で, f と f^{-1} が共に連続

- **ハウスドルフ性**

$(X, \mathcal{O}_X)$ が ハウスドルフ(Hausdorff) $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall x, y \in X$ に対して $x \neq y$ ならば

$^\exists U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して

$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$



- **積位相** : 復習して下さい

多様体の定義

$\mathbb{R}^m$ には上の位相を入れておく

定義 位相空間 X の open set U から $\mathbb{R}^m$ の open set U' への同相写像

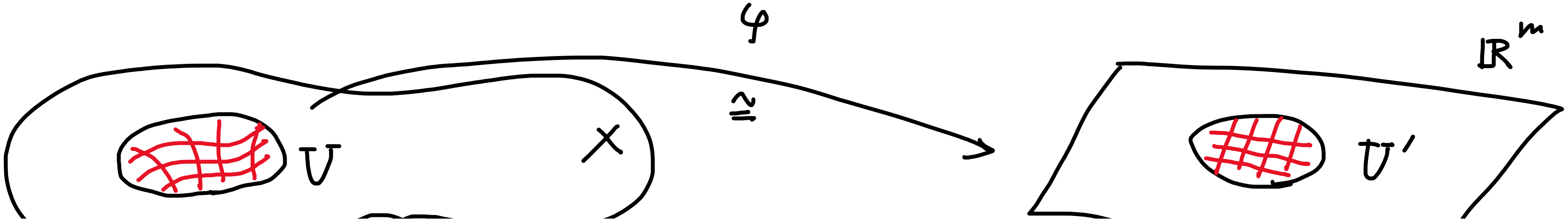
$$\begin{array}{ccc} \varphi : U & \longrightarrow & U' \\ \cap & & \cap \\ X & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

を **局所座標** という (local coordinate)

組 (U, φ) を m次元座標近傍と呼ぶ.

(coordinate neighborhood)

Local chart とも言う



$\varphi(p) = (x_1(p), \cdots, x_m(p))$

各 x_i は U 上の 連続関数

（x_i を座標という）

定義：**m次元位相多様体**(topological manifold)とは位相空間 M であって

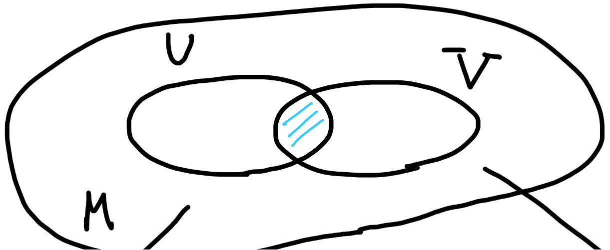
(1) M はハウスドルフ
(2) $\forall p \in M$ に対して p を含む m次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, phantom, "\underset{open}{\supset}"] & U \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & U' \arrow[r, phantom, "\underset{open}{\subset}"] & \mathbb{R}^m \\
& p \arrow[u, phantom, "\in" sloped] & &
\end{tikzcd}$$

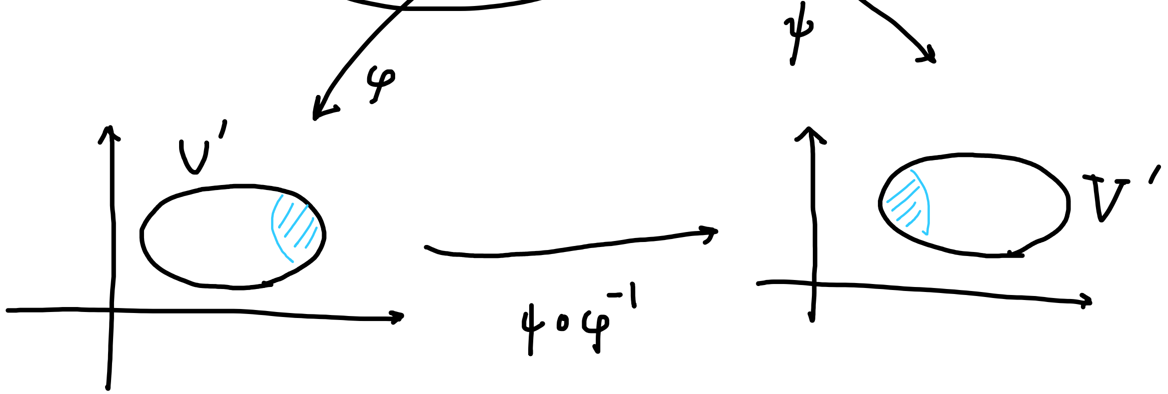
㊟ さらに M が第2可算（可算な開基をもつ）と仮定することも多い

座標変換

(U, φ), (V, ψ) 2つの chart $\left(U \cap V \neq \phi \right.$ とする $\left. \right)$



$U \cap V$ は U の open



⇝ φ は同相なので

$\varphi(U\cap V)$ は U' の open

⇝ 特に $\varphi(U\cap V)$ は $\mathbb{R}^m$ の open

（同様に $\psi(U\cap V)$ も $\mathbb{R}^m$ の open）

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U\cap V) \arrow[rr, bend right, "\psi\circ\varphi^{-1}\text{ も同相}"'] & U\cap V \arrow[l, "\varphi"', "\cong"] \arrow[r, "\psi", "\cong"'] & \psi(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

$\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \xrightarrow{\cong} \psi(U\cap V)$

を **座標変換** という

- 関数の形でかくと

$$\left.\begin{aligned} \varphi(p) &= (x_1(p), \cdots, x_m(p)) \\ \psi(p) &= (y_1(p), \cdots, y_m(p)) \end{aligned}\right\} \text{のとき}$$

$$(\psi\circ\varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_m) = (\tilde{y}_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, \tilde{y}_m(x_1, \cdots, x_m))$$

各 $\tilde{y}_i$ は $\varphi(U \cap V)$ 上の連続関数

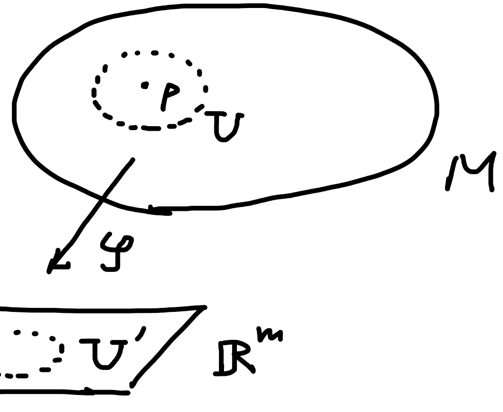
$$\tilde{y}_i = y_i(\varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_m))$$

注 今後は y_i と $\tilde{y}_i$ を区別しない
ことも あります

2回目

2020年4月21日　23:21

chart (U, φ)



$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} U' \quad 同相$$

位相多様体：各点で座標近傍がとれるような位相空間 M
　　　　　　　　　(chart)

C^∞級多様体の定義

Recall ・$\mathbb{R}^m$ の open set 上で定義された関数 $f(x_1, \dots, x_m)$
が C^∞級

$\underset{\text{def}}{\iff}$ f の任意階の偏導関数 $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_m^{k_m}}(x_1, \dots, x_m)$
が存在して連続

・$\mathbb{R}^n$ 値関数 $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ が C^∞級

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall i$ に対して $f_i(x_1, \dots, x_m)$ が C^∞級

定義 位相空間MとMのm次元座標近傍の族 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとき

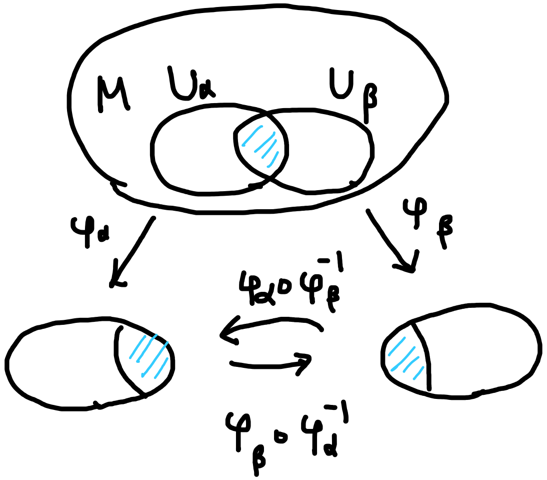
組 $(M, \mathcal{S})$ をm次元C^∞級多様体という.

(1) Mはハウスドルフ

(2)
$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$$

(3) $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ならば 座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cap}\ \text{open}}{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} \xrightarrow{\cong} \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cap}\ \text{open}}{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}$$ は C^∞級



㊟ ・(1), (2) ⇒ Mは m次元位相多様体

・$\mathcal{S}$ を座標近傍系（アトラス）と呼ぶ

（$\mathcal{S}$ は省略することが多い）

(3)について： $\alpha = \beta$ のとき $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = id$ （恒等写像）より C^∞級

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ と $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ は 互いに逆写像で (3)から共に C^∞級

↳ このようなものをC^∞級同相写像という

前回演習 6 S^2 に C^∞級多様体の構造を立体射影で入れた

これとは少し違う方法で，C^∞級多様体の構造を入れたい

$$S^m = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

- $\mathbb{R}^{m+1}$ の相対位相を入れる
- Hausdorff 位相空間になる（前回演習問題２，３）
- 局所座標近傍（chart）

$$U_i^+ = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0 \}$$

$$U_i^- = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^n \mid x_i < 0 \}$$

$$U_i^+ = S^m \cap \underbrace{\{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_i > 0 \}}_{\mathbb{R}^{m+1} \text{の open}}$$ は open set

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_i^+ (x_1, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$\hat{x}_i$ は x_i を除く意.

$$\varphi_i^- : U_i^- \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_i^- (x_1, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$\mathbb{R}^m$ の open

φ^+ の像 は $\varphi^+(U^+) = \{ (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_1^2 + \cdots + y_m^2 < 1 \} = B_1(0)$

で $\varphi_i^+ \quad U_i^+ \xrightarrow{\cong} B_1(0)$ ← これは同相である（演習）

・座標変換 $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$ は C^∞級になる（演習） ⇝ S^m のアトラス

積多様体
$$\left(\begin{array}{ll} M^m & : m\text{次元 } C^\infty\text{級多様体} \\ N^n & : n\text{次元 } C^\infty\text{級多様体} \end{array} \right.$$

(上の添え字 m, n は次元を表す．)

⇝ $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^∞級多様体

(1) $M \times N$ には積位相を入れる

$\{U \times V \mid \underset{\text{open}}{U \subset M}, \underset{\text{open}}{V \subset N}\}$ を開基とする位相
open basis

M, N : Hausdorff ⇒ $M \times N$ も Hausdorff

(2) Mのアトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$
Nのアトラス $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$
に対して $M \times N$ のアトラスを

$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ とおく

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_\alpha\times\psi_\beta : & U_\alpha\times V_\beta & \xrightarrow{\cong} & \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\psi_\beta(V_\beta) & \text{は 同相} \\ & \cap \ \text{open} & & \cap \qquad \text{open} & \\ & M\times N & & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n & \end{array}$$

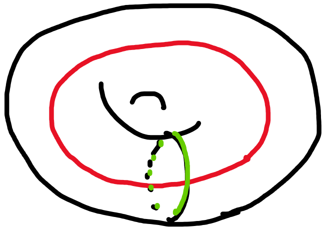
$$(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(x,y) = (\varphi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y))$$ （座標変換 C^∞級 を check）

例 トーラス $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ C^∞級多様体

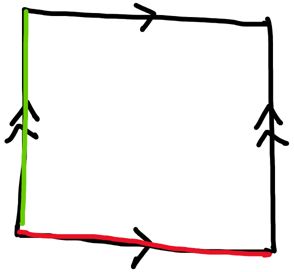
$$T^m = \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{m\text{コ}}$$ C^∞級 多様体 になる

（m次元トーラス）

T^2

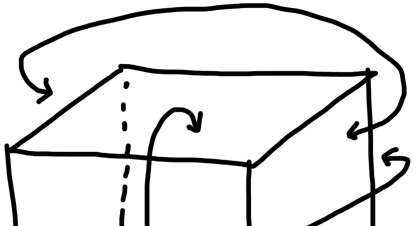


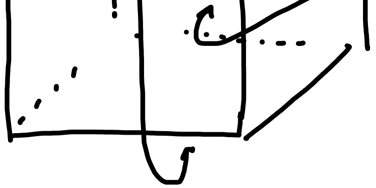
=



正方形の対辺を同一視して得られる位相空間

T^3





対面を同一視

開部分多様体　M: C^∞級多様体　$U \subset M$: open set

⇝ Uは自然にC^∞級多様体の構造を持つ

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$: Mのアトラス ⇝ $\{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})\}$ は Uのアトラスを定める

リーマン球面　$\mathbb{C}$の1点コンパクト化　$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

復習：X：位相空間，Xの一点コンパクト化とは　$X^* = X \sqcup \{\infty\}$ に次の位相を入れたもの

$$U \subset X^* \text{ が open} \iff \begin{cases} \text{① } U \not\ni \infty \text{ かつ } U \text{ は } X \text{ の open} \\ \text{又は} \\ \text{② } U \ni \infty \text{ かつ } X \setminus U \text{ はコンパクト閉集合} \end{cases}$$

$\{$ • X^* はコンパクト位相空間

・ X が局所コンパクト，ハウスドルフ ⇒ X^* も ハウスドルフ

$\hat{\mathbb{C}}$ に C^∞級多様体の構造を入れる　　chart として次をとる

・ $U_1 = \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$

・ $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \sqcup \{\infty\}$ ← open (∵ $\{0\}$ がコンパクト 閉)

・ $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$　　$\varphi_1 = id$

・ $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$　　$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z & z \neq \infty \text{ のとき} \\ 0 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}$

↑
同相になる

座標変換

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times$$

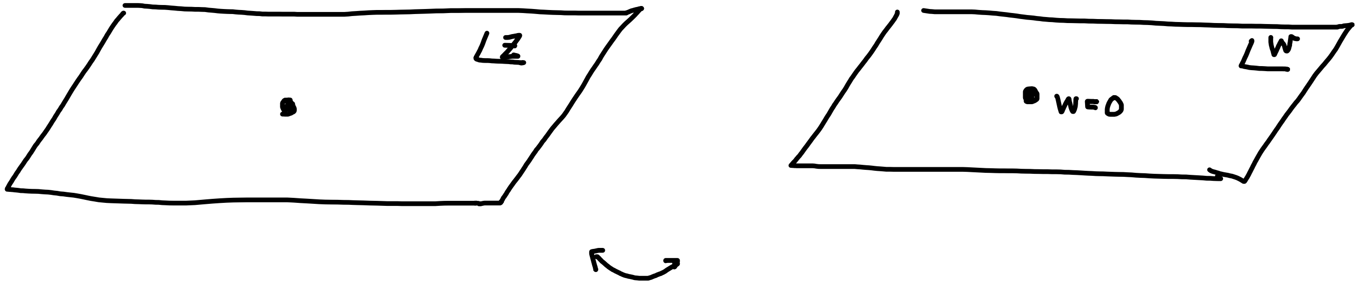
$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \cap U_2 \arrow[dl, "\varphi_1 = id"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & \\
\mathbb{C}_z \supset \mathbb{C}^\times \arrow[rr, hook] & & \mathbb{C}^\times \subset \mathbb{C}_w
\end{tikzcd}$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z$ は C^∞級 map

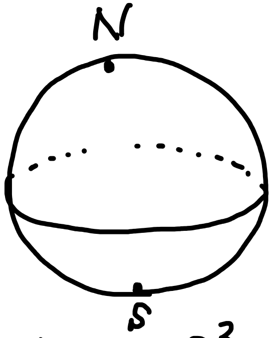
実座標でかくと　$z = x + iy$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$



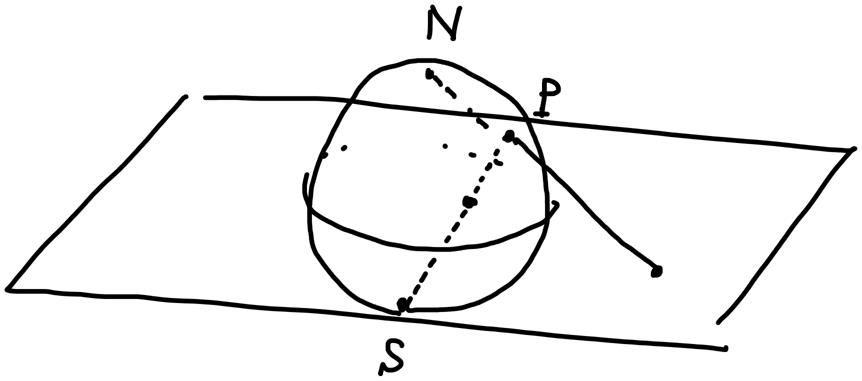
原点以外を $w = 1/z$ で はり合わせる



位相的には S^2 と同相

注: 立体射影によるS^2の座標系との関係

$$\begin{tikzcd}
 & S^2 \setminus \{N, S\} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \arrow[rr] & & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\
(x, y) \arrow[rr, mapsto] & & \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)
\end{tikzcd}$$



$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

φ を φ_1 に対応するものと思うと　ψ と 複素共役 $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ を合成したもの

か φ_2 に対応する　　$\varphi_2 = - \circ \psi$

極大アトラス

$\mathcal{S}$:　C^∞級$\overbrace{\text{多様体}}^{M}$ の アトラス

どのような座標近傍(chart)を許してよいか？

(V, ψ) : M の chart　　$V \underset{\text{open}}{\subset} M$　　$\psi : V \xrightarrow{\cong} V' \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$

定義： chart (V, ψ) が アトラス $\mathcal{S}$ に関して C^∞級

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ $^\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{S}$ に対して座標変換 $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ が C^∞級

$$\begin{tikzcd}
 & U_\alpha \cap V \arrow[dl, "\varphi_\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \arrow[rr, shift left, "\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}"] & & \psi(U_\alpha \cap V) \arrow[ll, shift left, "\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq", "\text{open}"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq", "\text{open}"]
\end{tikzcd}$$

定義 $\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \{ (V, \psi) : M の chart \mid (V, \psi) は \mathcal{S} に関して C^\infty 級 \}$

を極大アトラスという.

注：(1) $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ はアトラスである. （つまり 座標変換はC^∞級）

(2) $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}(\mathcal{S})$ （これは定義からわかる）

(3) $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスのなかで包含関係について最大

位相多様体 M 上の C^∞級アトラス $\mathcal{S}, \mathcal{J}$ が同値

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{J})$ $\iff$ $\mathcal{S} \cup \mathcal{J}$ がアトラスになる

（座標変換が C^∞級）

このとき

C^∞級多様体 $(M, \mathcal{S})$ と $(M, \mathcal{J})$ は「同じ」と考える.

*今後は最初に与えられたアトラス$\mathcal{S}$にはこだわらず，任意の$\mathcal{M}(\mathcal{S})$に属するchartを自由に考える

例 S^2 のアトラス 1 : $S^2 \setminus \{N\}$, $S^2 \setminus \{S\}$ に立体射影で座標

アトラス 2 : $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}_{i=1,2,3}$

↖

↙ 実は同値である

3回目

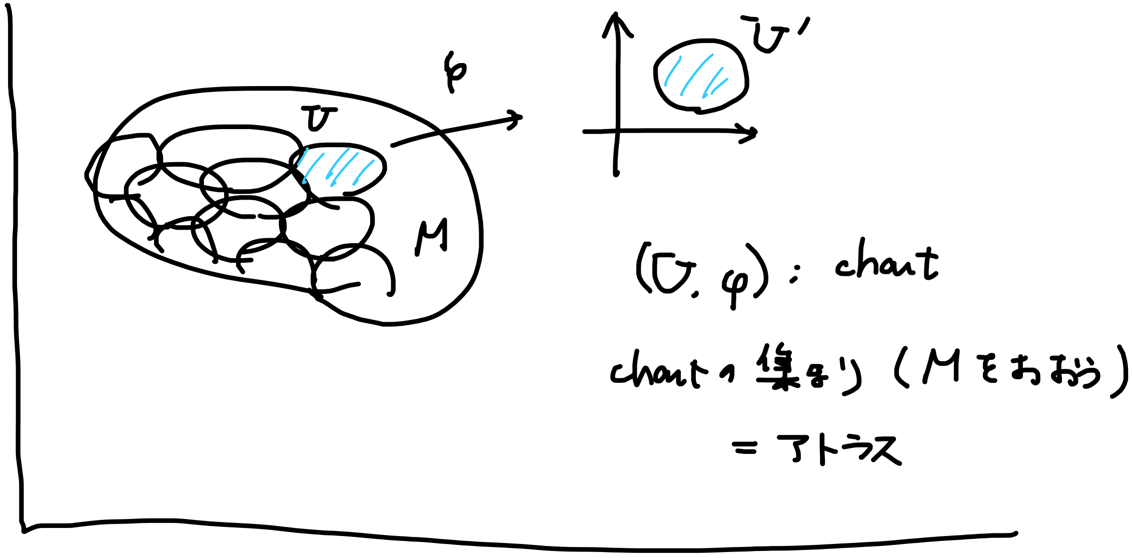
2020年5月12日　17:23

多様体上のC∞級関数

$$(\underset{\cdots}{M^m}, \underset{\text{アトラス}}{\mathcal{S}}) \; : \; \overbrace{C^\infty}^{\text{級}}\text{多様体}$$

$(C^\infty \text{ mfd})$

$\mathcal{M}(\mathcal{S})$: 極大アトラス



(U, φ) : chart

chartの集まり（Mをおおう）

= アトラス

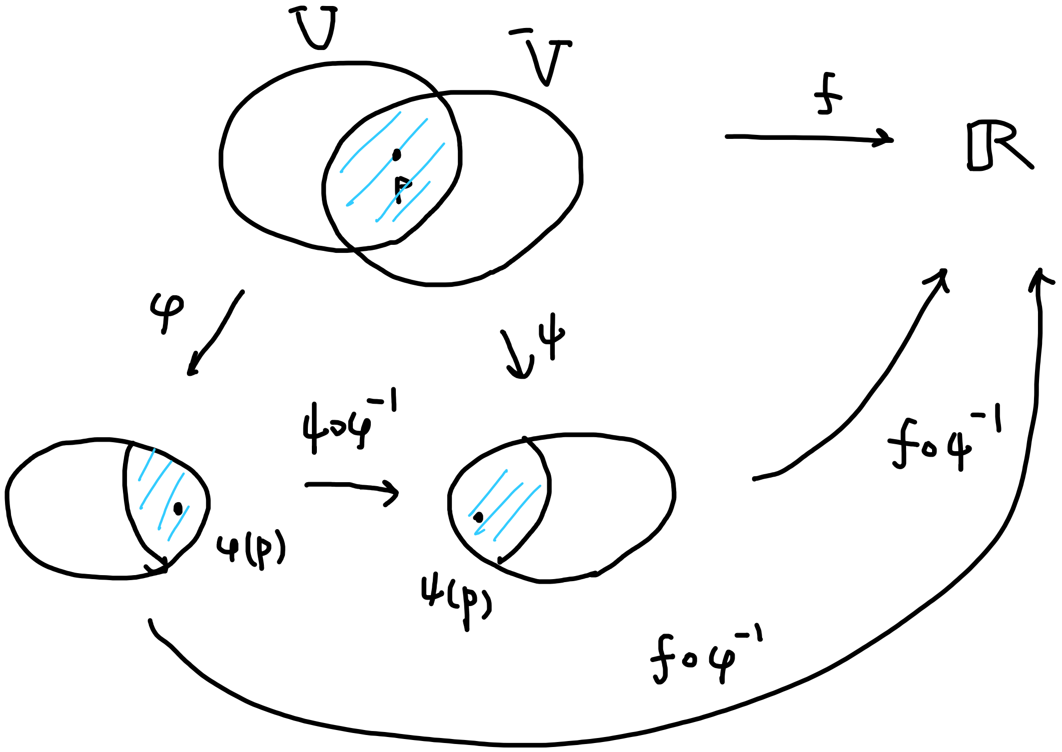
定義： $f : M \to \mathbb{R}$ が 点p（の近傍）で C^∞級

$\Longleftrightarrow$ ${}^\exists p$を含む chart $(U, \varphi) \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$

s.t. $f \circ \varphi^{-1} : U' \xrightarrow[\varphi^{-1}]{} U \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$ は $\underline{\varphi(p)\text{の近傍で}}$ C^∞級

㊟ この定義は pを含む C^∞ chart (U, φ) のとり方によらない

(V, ψ) : pを含む別の chart $\in M(S)$



$\varphi(U \cap V)$ 上で

$$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ \underbrace{(\psi \circ \varphi^{-1})}_{C^\infty\text{級同相}}$$

なので

$f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ の近傍で C^∞級

$\Longleftrightarrow$ $f \circ \psi^{-1}$ が $\psi(p)$ の近傍で C^∞級

㊟ $f : M \to \mathbb{R}$ が点pで C^∞級 $\Rightarrow$ f は点pで連続

定義：$f: M \to \mathbb{R}$ C^∞級 $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $^\forall p \in M$ に対して f は点 p で C^∞級

（$\iff$ $^\forall (U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して $f \circ \varphi^{-1}$ が C^∞級）

C^∞級写像 （C^∞ map）

以下では M^m, N^n ： C^∞級多様体 （C^∞ mfd）

定義 $f: M \to N$ が点 $p \in M$ （の近傍）で C^∞級とは

$^\exists (U, \varphi)$ ： p を含む M の chart

$^\exists (V, \psi)$ ： $f(p)$ を含む N の chart

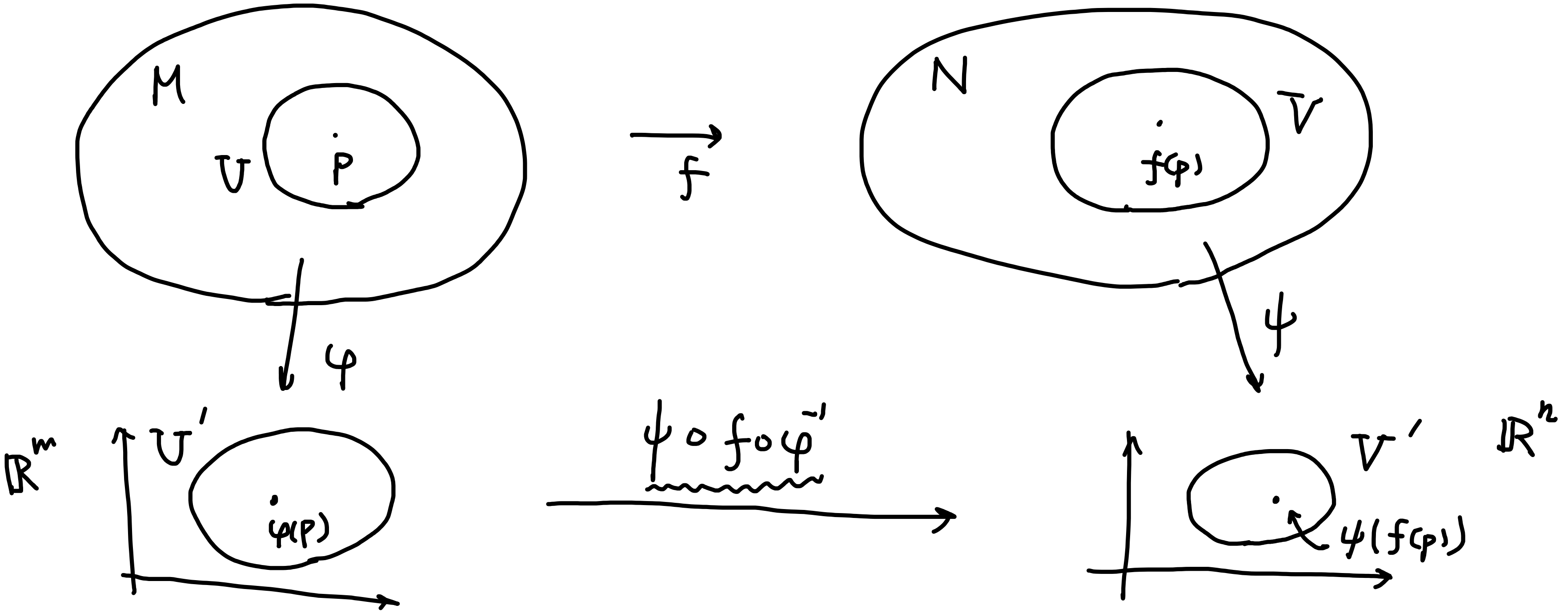
が存在して

しかし f の連続性から U を小さくとり直せば

① $f(U) \subset V$ ← (もし f が連続なら U と

①のようにできる)

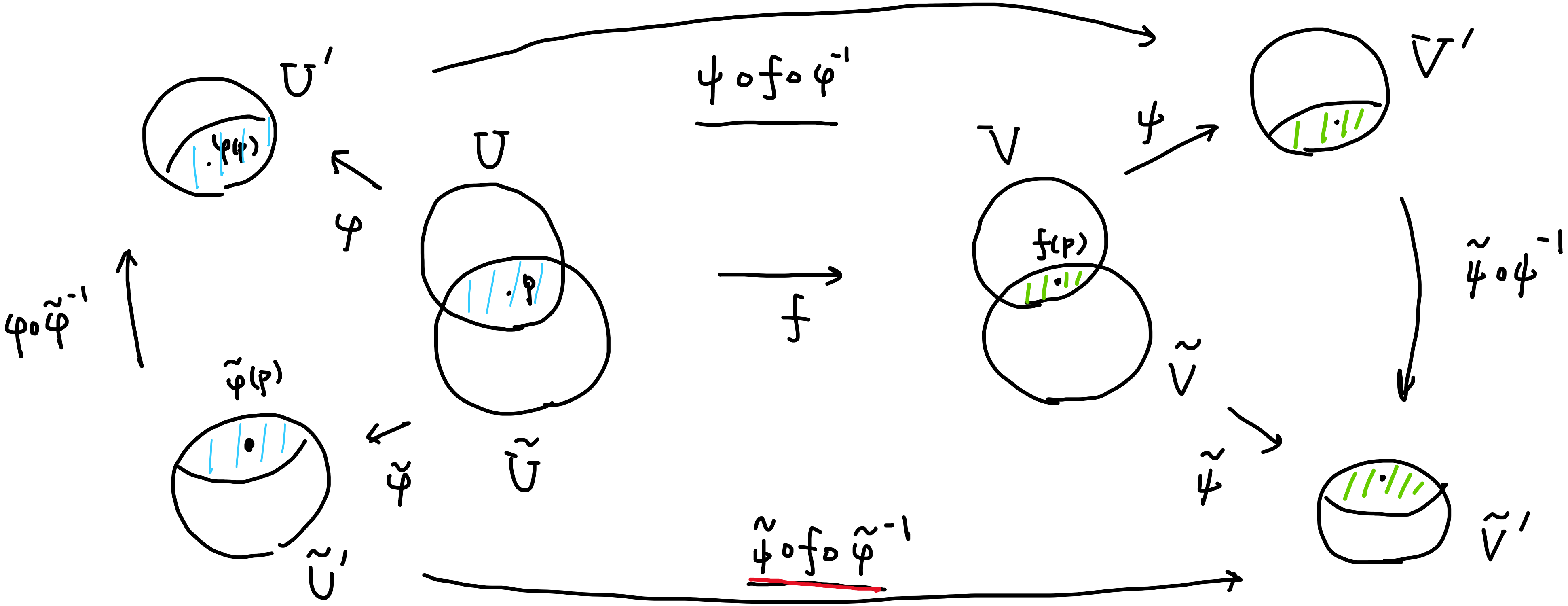
② $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\varphi(U)}{\overset{\|}{U'}} \longrightarrow \underset{\psi(V)}{\overset{\|}{V'}}$ は点 $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級



㊟ この定義は chart のとり方によらない

$(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ pを含む chart $\Big\}$ $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$ とする

$(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ $f(p)$



$$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1} = \underline{(\tilde{\psi}\circ\psi^{-1})}\circ\underline{(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})}\circ\underline{(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})}$$

も $\tilde{\varphi}(p)$ の近傍で C^∞級

↖ $\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})$ 上で定義

㊟ $f: M\to N$ が 点 p で C^∞級 $\Rightarrow$ f は 点 p で 連続

定義 $f: M\to N$ が C^∞ map $\Longleftrightarrow$ $\forall p\in M$ に対して f は p で C^∞級

def.

例

① C^∞級関数 $f\quad M \to \mathbb{R}$ は $\underset{\sim\sim}{\mathbb{R}}$ に自然な C^∞ mfd の構造を入れると C^∞ 写像になる

② $c:\ \underset{\sim\sim\sim}{(a,b)} \longrightarrow M$ $\quad C^\infty$ map を C^∞級曲線という

(C^∞ curve)

開区間

↑

C^∞ mfd

③ $U \subset M$ open set $\rightsquigarrow$ U は C^∞ mfd の構造をもつ

(開部分多様体)

$\rightsquigarrow$ $i: U \hookrightarrow M$ 包含写像は C^∞級

④ Mӧbius 変換 (一次分数変換)

$az+b$

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $z \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$ad-bc \neq 0$ とする ← $ad=bc$ なら $(a,b) \parallel (c,d)$ となり $f(z)$ は定数

は C^∞ map $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に拡張される

$(\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$

- 定義は次の通り

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & cz+d \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & cz+d = 0 \text{ のとき } (\text{このとき } az+b \neq 0) \\ \dfrac{a}{c} & z=\infty,\ c \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z=\infty,\ c = 0 \text{ のとき} \\ & (\text{このとき } a \neq 0) \end{cases}$$

以下では $c \neq 0$ とする. f が C^∞ map を示したい

$\hat{\mathbb{C}}$ の chart (U_1, φ_1), (U_2, φ_2)

$\underline{U_1 = \mathbb{C}}$, $\varphi_1(z) = z$

$$U_2 = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}, \quad \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq \infty \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

① $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ のとき

$$f\Big|_{\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}} : \underline{\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

(U_1, φ_1) をここに制限して得られる chart $(\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}, \varphi_1)$

chart (U_1, φ_1) をとる

$\underline{\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}}(z) = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ が $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ 上 C^∞級 は明らか

② $z = -\frac{d}{c}$ で C^∞級 であること　　$\underline{f}(-\frac{d}{c}) = \underline{\infty}$　　$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$f\left(U_1 \setminus \underline{\left\{ z = -\frac{b}{a} \right\}} \right) \subset U_2$, に注意する

chart (U_1, φ_1) をここに制限

$a=0$ のときは 除かなくてよい

$-\frac{d}{c}$ を含む

$\left(-\frac{b}{a} \neq -\frac{d}{c} \right)$

∞ を含む chart

$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ を計算

$$(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(z) = \begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{az+b}{cz+d} \right) & cz+d \neq 0 \text{ のとき} \\ \varphi_2(\infty) & cz+d = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{cz+d}{az+b} & cz+d \neq 0 \\ 0 & cz+d = 0 \end{cases}$$

$= \dfrac{cz+a}{az+b}$ は $z = -\dfrac{a}{c}$ の近傍で

C^∞ 級

③ $z=\infty$ の近傍で C^∞ 級であること　$f(\infty) = \dfrac{a}{c} \in U_1$

$f(\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{U_2 \setminus \{-\tfrac{d}{c}\}}) \subset U_1$ に注意　$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_2 \setminus \{-\tfrac{d}{c}\}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を計算

$$(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(w) = \begin{cases} f(1/w) & w \neq 0 \\ f(\infty) & w = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a/w + b}{c/w + d} = \dfrac{a+bw}{c+dw} & w \neq 0 \\ a/c & w = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{a+bw}{c+dw}$$ は $w = 0 = \varphi_2(\infty)$ で

C^∞ 級

定理 $f: M \to N$, $g: N \to Q$: C^∞ map

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ $M \to Q$ は C^∞ map （演習）

定義 $f: M \longrightarrow N$ が C^∞級同相写像 (diffeomorphism)

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ① f は 全単射

② f と f^{-1} は 共に C^∞ map

このとき M と N は C^∞級同相 という

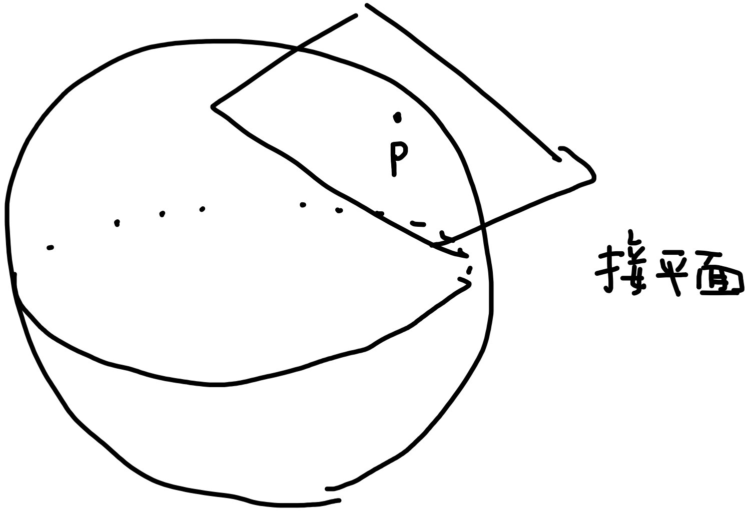
㊟ f C^∞級同相 $\Longrightarrow$ f 同相

(例) $f($ $az+b$ $\hat{\ }$ $\hat{\ }$ は diff ad − bc ≠ 0 のとき $f(z) = \frac{\qquad}{cz+d}$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は diffeo になる

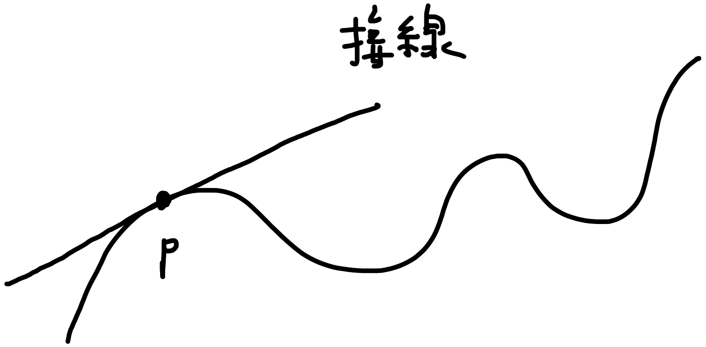
接空間 (tangent space)

接ベクトル空間ともいう

$\mathbb{R}^n$ 内に実現される多様体の接空間 T_pM



S^2

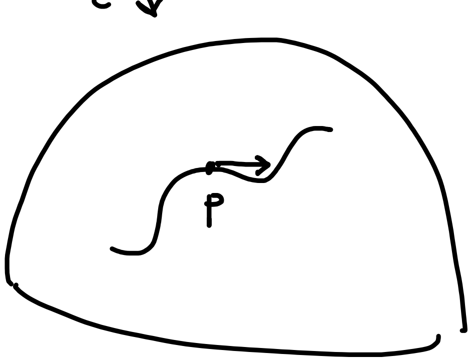


「pのまわりで多様体をベクトル空間で近似する」

抽象的な多様体の接空間とは？

速度ベクトル

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ C^∞曲線



$c(0) = p$

"$\dfrac{dc}{dt}(0)$" を定義したい

p を含む chart (U, φ) をとり

C$^\infty$ function

$\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$

"$\dfrac{dc}{dt}(0)$" $= \left(\dfrac{dc_1}{dt}(0), \cdots, \dfrac{dc_m}{dt}(0)\right)$

これは座標のとり方による

$c(0) = p$ となるもの

点 p を通る C^∞級曲線に次の同値関係を入れる

$c \sim \tilde{c} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists$ p を含む chart (U, φ)

$\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$

$\varphi(\tilde{c}(t)) = (\tilde{c}_1(t), \dots, \tilde{c}_m(t))$ とおくとき

$$\left(\frac{dc_1}{dt}(0), \dots, \frac{dc_m}{dt}(0)\right) = \left(\frac{d\tilde{c}_1}{dt}(0), \dots, \frac{d\tilde{c}_m}{dt}(0)\right)$$

㊟ この定義の右辺は chart (U, φ) のとり方によらない

第1の定義

$$T_pM = \{ p \text{ を通る } C^\infty \text{ 級曲線} \} / \sim$$

- ベクトル空間の構造は明らかではない
- (U, φ) をとると $\mathbb{R}^m$ と同一視される

第2の定義 「c に沿った微分作用素」を考える

$f \quad \underset{\sim}{U} \to \mathbb{R}$ $\quad C^{\infty}$級関数

pを含む chart

$\rightsquigarrow$

$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{d}{dt} f \circ c(t) \Big|_{t=0}$ を考える

4回目

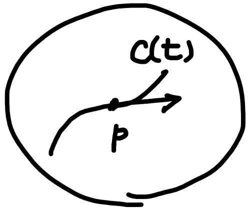
2020年5月19日　15:48

M: C^∞級多様体 (C^∞ mfd)

T_pM : 点 $p \in M$ での接空間

(第1の定義)　$T_pM = \{p を通る曲線\}/\sim$

↑ 速度ベクトル



$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$　C^∞ map

$c(0) = p$

(第2の定義)　微分作用素 (方向微分)

f : 点pのまわりの C^∞級関数

$$\underline{f} \longmapsto \left.\underline{\frac{d}{dt} f(c(t))}\right|_{t=0}$$

; cに沿った方向微分

定義　点 $p \in M$ での**方向微分**とは 点pの近傍で定義された C^∞級関数 f に対して 実数 $v(f)$ を対応させるもので

⓪ f と g が p のある近傍で一致していたら、 $v(f) = v(g)$

① $v(af + bg) = a\,v(f) + b\,v(g)$　$(a, b \in \mathbb{R})$

② $v(fg) = f(p) \cdot v(g) + g(p)\,v(f)$　(Leibniz rule)

をみたすもの

命題 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ C^∞ map, $c(0) = p$

$$\underset{p\text{のまわりの}C^\infty\text{級}}{\underbrace{f}} \longmapsto v_c(f) := \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}$$

は 点 p での方向微分である

∵ ② $v_c(f \cdot g) = \dfrac{d}{dt}\left(f(c(t))\ g(c(t))\right)\Big|_{t=0}$

$$= \frac{d f(c(t))}{dt}\Big|_{t=0} g(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d g(c(t))}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= v_c(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_c(g) \quad //$$

定義　T_pM = {点 p での方向微分}　　（第2の定義）

命題　T_pM は $\mathbb{R}$ ベクトル空間の構造をもつ。

∵　v, w : 方向微分 ⇒ $a \cdot v + b w$　　$a, b \in \mathbb{R}$

も方向微分

$$f \longmapsto a \cdot v(f) + b \cdot w(f)$$

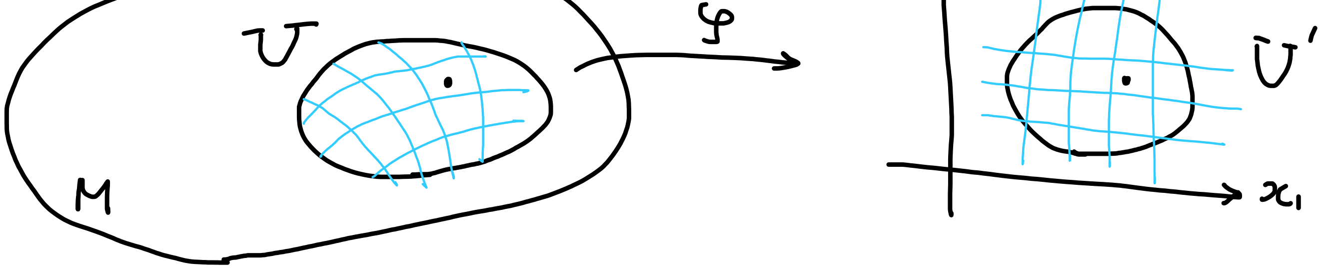
今後の記号

$(U, \underset{\sim}{\varphi})$　chart　　

$$\begin{tikzcd} & M & \mathbb{R}^m \\ \varphi : & U \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, "\approx"] & U' \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \end{tikzcd}$$

・ $\varphi(p) = \big(x_1(p), \cdots, x_m(p)\big)$ の形にかくとき 各 x_i は U 上の C^∞ 級関数

$(U, \underline{\varphi})$ を $(U ; \underline{x_1, \cdots, x_m})$ と書くことがある



座標 $(x_1, \cdots, x_m)$ が U 上に「描かれている」と考える

- $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ の座標表示 $f \circ \varphi^{-1} : U' \longrightarrow \mathbb{R}$

のことを記号の濫用により $f(x_1, \cdots, x_m)$ と書く

$$\begin{array}{c} f(x_1, \cdots, x_m) \\ \parallel \\ \left(f \circ \varphi^{-1} (x_1, \cdots, x_m) \right) \end{array}$$

点 p を含む chart $(U, \varphi) = (U; x_1, \cdots, x_m)$

p のまわりの C^∞ 級関数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ の点 p での値

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (x_1(p), \cdots, x_m(p))$$

(正確には)

を対応させる写像は点pでの方向微分になる

これを $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM$ と書く.

㊟ 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を

$$c(t) = \varphi^{-1}\left(x_1(p), x_2(p), \cdots, x_i(p)+t, \cdots, x_m(p)\right)$$

と定めるとき $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = v_c$ (cに沿った方向微分)

定理 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ は T_pM の $\mathbb{R}$ 上の基底

∵ [一次独立性] $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ 関数

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) x_j = \delta_{ij}$$

もし $\underline{\sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p} = 0$ ならば x_i に作用させて $a_i = 0$ がいえる

//

[T_pM を生成すること] $v \in T_pM$ 方向微分

$1 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ 定数関数

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + v(1)\, 1$$

$$\therefore \quad v(1) = 0$$

さらに $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して $v(a) = a \cdot v(1) = 0$

<u>Lemma</u> $f(x_1, \cdots, x_m)$: $0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍で定義された C^∞ 級関数

$\Rightarrow$ 0の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$ が存在して

$$f(x_1,\dots,x_m) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} x_i x_j\, g_{ij}(x)$$

座標 x_i を $x_i - \underbrace{x_i(p)}_{\text{const}}$ とおきかえて，$x_1(p) = x_2(p) = \cdot = x_m(p) = 0$ と仮定してよい

f pのまわりの C^∞ 関数 に対して 上の Lemma をつかう

$$v(f) = \underbrace{v(f(0))}_{\substack{\| \\ 0}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\cdot v(x_i) + \underbrace{\sum_{i,j} v(x_i x_j\, g_{ij}(x))}_{\text{Leibniz rule より } 0}$$

$$v(x_i x_j g_{ij}) = \underline{v(x_i)}\,\underbrace{x_j(p)}_{\substack{\| \\ 0}}\,g_{ij}(p) + \underbrace{x_i(p)}_{\substack{\| \\ 0}}\,\underline{v(x_j)}\,g_{ij}(p) + \underbrace{x_i(p)\,x_j(p)}_{\substack{\| \\ 0}}\,\underline{v(g_{ij})} = 0$$

$$\therefore\ v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \sum^{m} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f$$

$$\therefore \quad v = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \qquad //$$

曲線に沿った方向微分

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ C^∞ curve, $c(0) = p$

$$v_c(f) = \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}$$ であった

$c(t)$の座標表示 $\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$ とおく

つまり $c_i(t) = x_i(c(t))$

$$v_c(f) = \frac{d}{dt} f(c_1(t), \cdots, c_m(t)) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1(0), \cdots, c_m(0))}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} \cdot \frac{dc_i}{dt}(0)$$

よって $v_c = \sum_{i=1}^{m} \underline{\frac{dc_i}{dt}}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ ⇝ 第1の定義と第2の定義は同値

以下では v_c のことを $\underline{\frac{dc}{dt}(0)}$ or $\underline{\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}}$ とも書く

座標変換

$(U, x_1, \cdots, x_m) = (U, \varphi)$ $\quad p \in U \cap V$

$(V; y_1, \cdots, y_m) = (V, \psi)$

charts

座標変換を与える関数を

$$x_i = \underline{x_i(y_1, \cdots, y_m)} \quad \left(\underset{\text{正確には}}{=} \varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \cdots, y_m) \text{ の第 } i \text{ 成分} \right)$$

と書く

<u>定理</u>

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{m} \underline{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(\underline{p})} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

正確には $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y_1(p), \cdots, y_m(p))$

(∵) $f(x_1, \cdots, x_m)$: p のまわりの C^∞ 関数を x 座標で表示したもの

$x_i = x_i(y)$ を代入すると y 座標表示になる

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p f = \frac{\partial}{\partial y_j} f(x_1(y), \cdots, x_m(y)) \Bigg|_{y = y(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f \qquad //$$

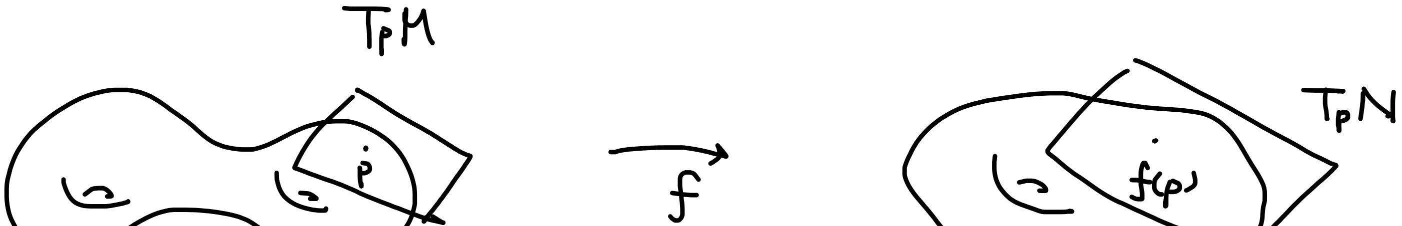
写像の微分

$f : M^m \longrightarrow N^n$ 点 p（の近傍）で C^∞ 級

に対して 線形写像 $\underline{d_p f} : T_pM \longrightarrow T_pN$ を定めたい

（df_p とも）　　（微分 あるいは 接写像）

fを点pのまわりで線形近似



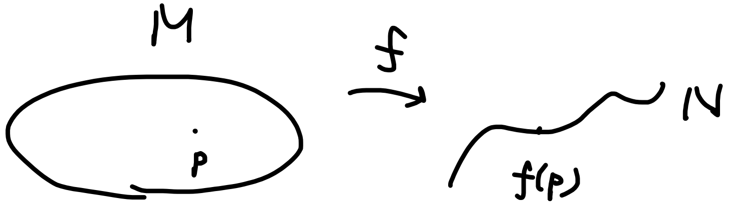
（曲線をつかった定義）　$c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$　C^∞ map,　$c(0)=p$

$\rightsquigarrow$　$\underline{f\circ c}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$　　$f\circ c(0)=f(p)$

$\uparrow$ $t=0$ の近くで C^∞級

d_pf は（曲線 c の同値類）を（曲線 $f\circ c$ の同値類）

に写すものと定義する



<u>局所座標をつかった計算</u>

$(U,\varphi)=(U;x_1,\cdots,x_m)$　・点 p を含む chart

$(V,\psi)=(V;y_1,\cdots,y_n)$　点 $f(p)$ を含む chart　s.t.　$f(U)\subset V$

$c(t)$ の座標表示を $\left(c_1(t), \cdots, c_m(t)\right)$

f の 座標表示 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ を $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \cdots, x_m) \end{cases}$ とする

$f \circ c(t)$ の座標表示 $\left(f_1(c_1(t), \cdots, c_m(t)), \cdots, f_n(c_1(t), \cdots, c_m(t))\right)$

- c に沿った方向微分 は 先ほどの計算から

$$\frac{dc}{dt}(0) = v_c = \underline{\sum_{i=1}^{m} \frac{dc_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \leftarrow$$

- $f \circ c$ に沿った方向微分は

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d f_i(c_1(t), \cdots, c_m(t))}{dt}\Bigg|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)} \underline{\frac{dc_j}{dt}(0)} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} \quad \leftarrow$$

: $\frac{dc}{dt}(0)$のみで決まっている

$\Rightarrow$ $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ は well-defined で

$$\frac{dc}{dt}(0) \longmapsto \frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$$

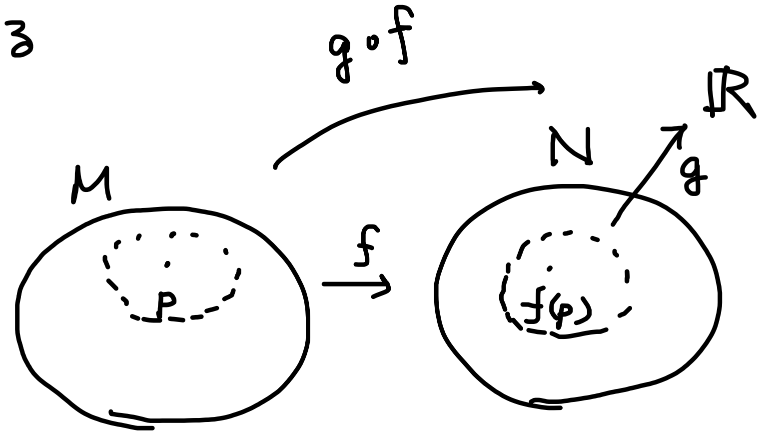
基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}$ に関する行列表示が

Jacobi行列 $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ で与えられる線形写像

(方向微分による定義)

$v \in T_pM$ ・ 点 p での方向微分 に対して 点 $f(p) \in N$

での方向微分 $d_pf(v)$ を次のように定める



$f(p)$のまわりの C^∞ 関数 g に対して

$g\circ f$ は pのまわりの C^∞ 関数

$$d_pf(v) : g \longmapsto v(g\circ f)$$

← これは方向微分になる（演習）

この定義は曲線によるものと一致

$v = \dfrac{dc}{dt}(0)$ なる 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ をとる

$$\underbrace{\frac{d(f\circ c)}{dt}(0)}_{\text{方向微分と思う}}(g) = v_{f\circ c}(g)$$

$$= \frac{d}{dt}\, g(f\circ c(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(g\circ f)(c(t))\Big|_{t=0}$$

$$= v_c(g\circ f)$$

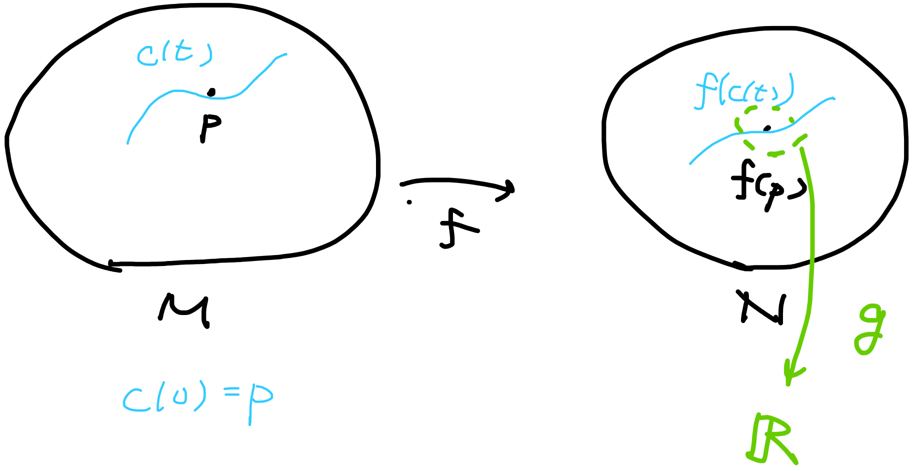
$$= \frac{dc}{dt}(0)\,(g\circ f) = \underbrace{v(g\circ f)}_{\text{上の定義}}$$

5回目

2020年5月27日　10:14

写像の微分　　$f : M \to N$　C^∞ map

$$\rightsquigarrow d_pf : \underbrace{T_pM}_{\sim\sim\sim} \longrightarrow T_{f(p)}N$$



① 曲線による定義

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}N \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ c\text{の同値類} & \longmapsto & f\circ c\text{の同値類} \\ \| & & \| \\ \dfrac{dc}{dt}(0) & & \dfrac{d(f\circ c)}{dt}(0) \end{array}$$

② 方向微分　　$v \in T_pM$: 方向微分と思う

$$d_pf(v)(g) := v(\underline{g\circ f})$$

g : $f(p)$のまわりの C^∞級関数

定理 (chain rule)　　$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$　　fは点pでC^∞級

p $\qquad f(p)$ $\qquad\qquad g$ は $f(p)$ で C^∞ 級

$$\Rightarrow \quad d_p(g\circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf$$

∵ 曲線の同値類

$$\begin{tikzcd}
 & & {[(g\circ f)\circ c]} \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
{[c]} \arrow[r, mapsto, "d_pf"'] \arrow[rru, bend left, mapsto, "d_p(g\circ f)"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & {[f\circ c]} \arrow[r, mapsto, "d_{f(p)}g"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & {[g\circ(f\circ c)]} \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\
T_pM \arrow[r] & T_{f(p)}N \arrow[r] & T_{g(f(p))}Q
\end{tikzcd}$$

座標で書く

$$M \to N \to Q$$

$(x_1,\cdots,x_m)$ $\quad (y_1,\cdots,y_n)$ $\quad (z_1,\cdots,z_q)$: 局所座標

$y_i = f_i(x_1,\cdots,x_m)$: f の座標表示

$z_i = g_i(y_1,\cdots,y_n)$: g 〃

$z_i = g(f_1(x),\cdots,f_n(x))$: $g\circ f$ 〃

d_pf の行列表示 ($\{\partial/\partial x_i\}$ $\{\partial/\partial y_j\}$ に関する) は Jacobi 行列

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1(p), \cdots, x_m(p)) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

chain rule を座標でかくと

$$(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)} \cdot (Jf)_p$$

$$\overset{\uparrow}{\wr}$$

$$\frac{\partial\, g_i(f_1(x), \cdots, f_n(x))}{\partial x_j} = \sum_k \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f_1(x), \cdots, f_n(x))} \ \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_m)}$$

C^∞級

<u>系</u> $f \quad M \to N$ diffeo (微分同相写像)

$\Rightarrow$ $d_pf \quad T_pM \to T_{f(p)}N$ は同型

$\because \quad f \circ f^{-1} = id_N \,, \quad f^{-1} \circ f = id_M$

$$\xRightarrow[\text{chain rule}]{} \begin{cases} d_p f \circ d_{f(p)} f^{-1} = d_{f(p)} id_N = id_{T_{f(p)} N} \\ d_{f(p)} f^{-1} \circ d_p f = d_p id_M = id_{T_p M} \end{cases}$$

$\therefore \quad d_p f$ は同型

系 $f : M \to N$ diffeo

$$\Rightarrow \quad \underset{\dim T_p M}{\underset{\shortparallel}{\dim M}} = \underset{\dim T_{f(p)} N}{\underset{\shortparallel}{\dim N}}$$

逆関数定理とその応用

定理 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^m$ open sets

$f : W_1 \to W_2$ C^∞ map

$p \in W_1$ において f の Jacobi 行列 $(Jf)_p$ が正則

$\Rightarrow$ $\exists U \subset W_1$: p の open nbd (neighborhood)

$\exists V \subset W_2$: $f(p)$ の open nbd

s.t. $f(U) \subset V$ かつ $f|_U : U \to V$ は diffeo

（多様体の場合に翻訳）

$f \quad \underline{\overset{\overset{p}{\wedge}}{M}} \to \underline{N}$ C^∞ map , d_pf は線形同型とする

C^∞ mfd

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists U \quad 点\ p\ の\ \text{open nbd} \\ \exists V : 点\ f(p)\ の\ \text{open nbd} \end{array}\right\} \text{ s.t. } \begin{array}{l} f(U) \subset V \\ f|_U \quad U \to V\ は\ \text{diffeo} \end{array}$$

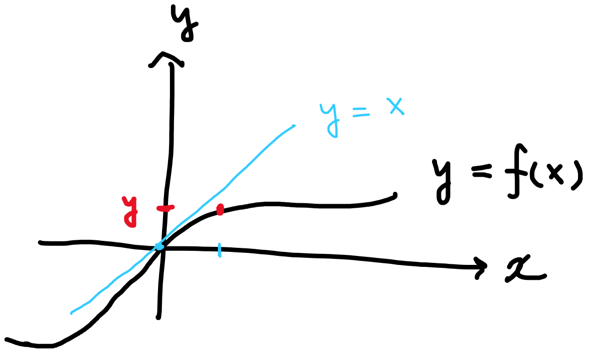
［証明の方針］ $f : W_1 \to W_2$

$$\begin{tikzcd} \cap & \cap \\ \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

- 座標の平行移動で $p=0$, $f(p)=0$ としてよい
- f を $(Jf)_p^{-1}\circ f$ でおきかえて $(Jf)_p = E_m$ としてよい
- y が 0 に近いとき $f(x)=y$ を解きたい

(Taylor 展開 : $f(x) = \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{f(0)} + (Jf)_0 \cdot x + o(|x|)$)

$\approx x$



(Newton法)

x_n : 近似解 ≈ 0

$f(x_n+\delta) \fallingdotseq y$

$\shortparallel$

$f(x_n) + \delta$ $\delta = y - f(x_n)$ とおく

$\underline{x_{n+1} = x_n + \delta = x_n + y - f(x_n)}$ とおくと よりよい近似解

$x_0 = 0$, $x_1 = y$, $x_2 = 2y - f(y)$, …. $\longrightarrow$ 真の解

- $g_y(x) = x + y - f(x)$ とおく

$y = f(x) \iff g_y(x) = x$, つまり x は g_y の不動点

- y が十分小さいとき $g_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \longrightarrow \overline{B_\varepsilon(0)}$ が縮小写像

になることを示すとよい $\rightsquigarrow$ $\exists !$ 不動点.

<u>陰関数定理</u> $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ open set

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ map

$f : U \to \mathbb{R}$ C map

$(\underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^m}, \underbrace{y_0}_{\mathbb{R}^n}) \in U$ $z_0 = f(x_0, y_0)$ とする

f を $\{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ に制限したものの Jacob.行列

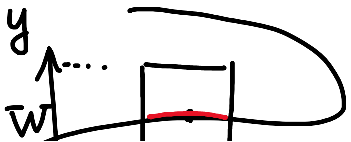
$$J\left(f|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}^n}\right)_{y_0} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{1 \le i,j \le n}$$ が正則とする

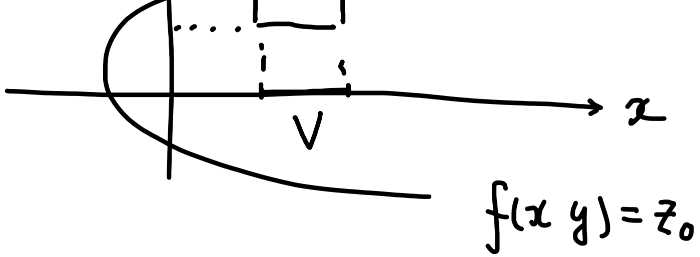
$\Longrightarrow$ ${}^\exists V \subset \mathbb{R}^m$: x_0 の open nbd ${}^\exists \varphi : V \to W$ C^∞ map

${}^\exists W \subset \mathbb{R}^n$: y_0 の open nbd

s.t. $V \times W \subset U$ であって ${}^\forall(x, y) \in V \times W$ に対して

$$y = \varphi(x) \iff f(x, y) = z_0$$





$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ \cup \\ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}$$

∵ 逆関数定理から導く

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$F(x,y) = (x,\ f(x,y))$ とおく

$$(JF)_{x_0,y_0} = \begin{array}{c|c} \overset{m}{\longleftrightarrow} & \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ \end{array} \left[\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \underset{\text{正則}}{\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial y_j}}} \end{array}\right]$$ は正則行列

F に逆関数定理を適用して

$$\begin{cases} A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x_0, y_0) \text{ の open nbd} \\ B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x_0, z_0) \quad〃 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} F(A) \subset B \\ F|_A : A \to B \\ \qquad \text{diffeo} \end{array}$$

- A を小さくとり直して $A = \tilde{V} \times W$ の形としてよい

- F^{-1} は

$$\begin{array}{ccc} F^{-1} \quad B & \longrightarrow & A = \tilde{V} \times W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, z) & \longmapsto & (x, \underbrace{\varphi(x, z)}_{C^\infty \text{ map}}) \end{array}$$

の形をしている

$V = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z_0) \in B \}$ とおくとき

- V は x_0 を含む open set
- $V \subset \tilde{V}$ 　　$x \in V$ なら

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(x, z_0) & \in & \overset{\tilde{V} \times W}{\overset{\|}{A}} \\ \| & & \\ (x, \varphi(x, z_0)) & & \therefore\ x \in \tilde{V} \end{array}$$

$(x,y) \in V \times W$ に対して

$$f(x,y) = z_0 \iff \underbrace{F(x,y)}_{A} = \underbrace{(x, z_0)}_{B}$$

$$\iff (x,y) = F^{-1}(x, z_0)$$

$$\iff y = \varphi(x, z_0)$$

より $\varphi(x) = \varphi(x, z_0)$ とおけばよい //

はめ込み と しずめ込み

immersion　　　submersion

定義 $f: M \to N$ C^∞ map

① fが $p \in M$ で はめ込み $\iff$ $d_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$

が 単射

② f が 点 $p \in M$ で 沈め込み $\Longleftrightarrow$ d_pf $T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$

が 全射

定義 f $M \to N$ が はめ込み $\Longleftrightarrow$ $\forall p \in M$ で f は はめ込み

(沈めこみ) (沈め込み)

定理 C^∞ map $f: M^m \to N^n$ が 点 p で はめこみ のとき

逆は

$m \leqq n$

点 p の 近くの 局所座標 $\exists (U ; x_1, \cdots, x_m)$

点 $f(p)$ 〃 $\exists (V : y_1, \cdots, y_n)$

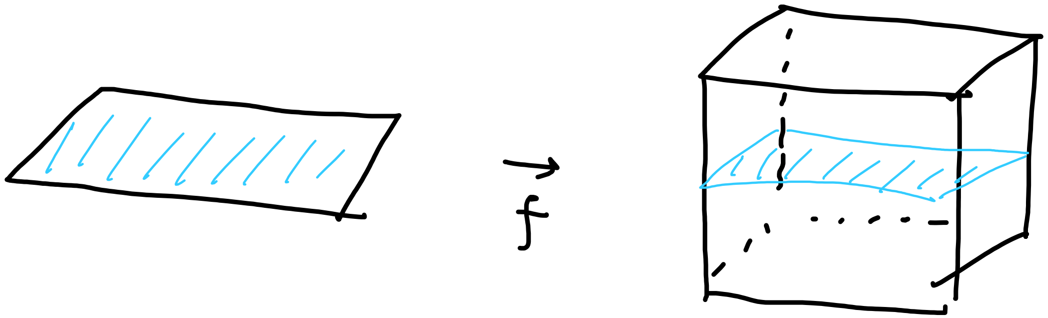
s.t ・ $x_i(p) = 0$, $y_j(f(p)) = 0$

・ $f(U) \subset V$, fの 座標表示 は

$$(x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n)$$

$$= (x_1, \cdots, x_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m\text{コ}})$$

と 与えられる



∵ 座標とって $M \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $N \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ の場合に帰着.

さらに $p = 0$, $f(p) = 0$ としてよい

$$\begin{array}{l} d_0 f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{は単射} \\ \shortparallel \\ (Jf)_0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $(Jf)_0$ の列ベクトルに $v_{m+1}, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ を

つけ加えて $\mathbb{R}^n$ の基底がつくれる

$$\tilde{f} : M \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad C^\infty \text{ map}$$

$$(\underline{x_1,\dots,x_m}, \underline{x_{m+1},\dots,x_n}) \longmapsto \underline{f(x_1,\dots,x_m)} + \underline{\sum_{j=m+1}^{n} x_j \vec{v}_j}$$

$$(J\tilde{f})_0 = \left.\left[\underbrace{(Jf)_0}_{m} \;\middle|\; \underbrace{\vec{v}_{m+1},\dots,\vec{v}_n}_{n-m} \right]\right\updownarrow n$$

は 正則行列

逆関数定理より

$$\left.\begin{aligned} &{}^{\exists}\,\tilde{U} \subset M \times \mathbb{R}^{n-m} \\ &{}^{\exists}\,V \subset N \end{aligned}\right\} \; 0 \text{ の open nbd}$$

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V} \qquad \text{diffeo}$$

$(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}$ を $\underline{V\text{ の座標}}$ にとる

$$U = \{ x \in M \mid (x, 0) \in \tilde{U} \}$$ とおく

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f|_U"] & V \arrow[r, "(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}", "\cong"'] & \tilde{U} \\
\tilde{U} \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[ur, "\tilde{f}|_{\tilde{U}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", bend left] & &
\end{tikzcd}$$

f の座標表示

$$\begin{tikzcd}
\underline{(x_1, \cdots, x_m)} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(x_1, \cdots, x_m) \arrow[r, mapsto, "(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}"] & \underline{(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)} \\
(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0) \arrow[ur, mapsto, "\tilde{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

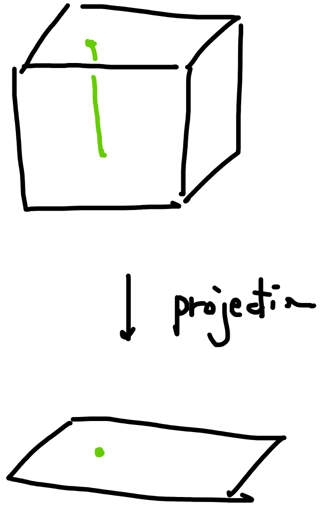
//

定理　$f : M^m \to N^n$ が点 p で沈め込み であるとき

$m \leq n$

p の座標近傍 $^{\exists}(U; x_1, \dots, x_m)$

$f(p)$ 〃 $^{\exists}(V; y_1, \dots, y_n)$



s.t. $x_i(p) = 0$, $y_j(f(p)) = 0$, $f(U) \subset V$

f の座標表示は

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{\text{最初のn成分への射影}} = (x_1, \dots, x_n)$$

と与えられる

6回目

ノートのタイトル 2020/06/02

- はめ込みと沈め込み

$f: M \to N$ C^∞ map が 点 p ではめ込み $\Longleftrightarrow$ $d_p f$ が単射

で沈め込み $\Longleftrightarrow$ $d_p f$ が全射

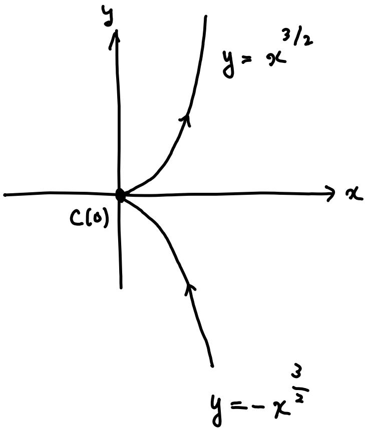
例 $i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は はめ込み

$$\left.\begin{aligned} U^+_{n+1} &= \{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} \\ \varphi: U^+_{n+1} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}\right\} \text{chart}$$

$$i \circ \varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = \left(x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\right)$$ 座標表示、(の1つ)

$$J(i \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$ の rank $= n$ ゆえ $d(i \circ \varphi^{-1})$ は単射

例 $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = (t^2, t^3)$

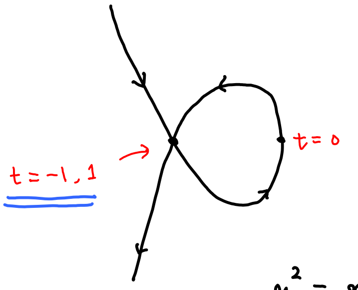


$c'(0) = (0, 0)$ より

$t = 0$ ではめ込みではない

例 単射ではないはめ込み

$c(t) = (1 - t^2, t - t^3)$



$y^2 = x^2(1 - x)$

$\forall t$ $c'(t) = (-2t, 1 - 3t^2) \neq 0$

より はめ込み

- トーラスへのはめ込み

$T^2 = S^1 \times S^1$ 2次元トーラス

(注) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \ni [\theta_1, \theta_2] \longmapsto (e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) \in S^1 \times S^1 = T^2$

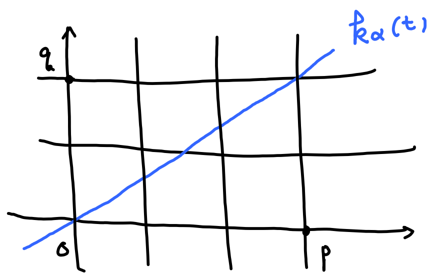
より $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\underline{f_\alpha(t) = [t, \alpha t]} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とおく

- 局所的に (θ_1, θ_2) は座標

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(t) = (1, \alpha) \neq 0$$ より f_α は はめ込み

① $\alpha \in \mathbb{Q}$ のとき $\alpha = \frac{q}{p}$ （既約分数, $p > 0$）



$f_\alpha(t) = f_\alpha(t+p)$ ：単射でない..

・f_α の像 $= \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \cong S^1$

② $\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき　f_α の像は T^2 で稠密 (dense) ← 演習

$f_\alpha(\mathbb{R})$ に相対位相を入れたものは $\mathbb{R}$ と同相でない

<u>埋め込み</u>（部分多様体）

<u>定義</u> $f: M \to N$ C^∞ map が 埋め込み (embedding) とは

C^∞ mfd

① f は <u>はめ込み</u> である

② $f(M)$ に N からの相対位相を入れるとき $f: M \to f(M)$ は <u>同相写像</u>

(はめ込み) $\underset{\neq}{\supset}$ (単射なはめ込み) $\underset{\neq}{\supset}$ (埋め込み)

↑　　↑

は はめ込み
だが 単射でない

$f_\alpha: \mathbb{R} \to T^2$

$\alpha \notin \mathbb{Q}$

定理 M, N : C^∞ mfd

$f: M \to N$ 単射はめ込み , M がコンパクト

$\Longrightarrow$ f は埋め込み

☺ 一般に X : コンパクト位相空間, Y : ハウスドルフ位相空間) $f: X \to Y$ 全単射連続 $\Rightarrow$ f は同相

を $X = M$, $Y = f(M)$ (に相対位相を入れたもの) に適用する.

例 $S^n \overset{}{\underset{i}{\hookrightarrow}} \mathbb{R}^{n+1}$ は 単射はめ込み, S^n は コンパクト) $\Rightarrow$ i は埋め込み

注 はめ込みは局所的には埋め込み

$f: M \to N$ が点pではめ込み $\Rightarrow$ pを含む開集合 $^\exists U \subset M$ s.t. $f|_U : U \to N$ はうめ込み

☺ 先週のはめ込みの局所座標表示に関する定理を使う

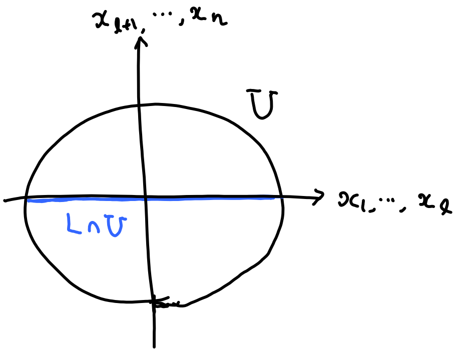
埋め込みの像は (正則) 部分多様体 とよばれるものになる
regular

定義 N^n : C^∞ mfd

Nの部分集合 L が Nの l次元部分多様体 ($l \leqq n$)

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall p \in L$ に対して $^\exists N$の pを含む chart $(U ; x_1, \cdots, x_n)$

s.t. $L \cap U = \{ a \in U \mid x_{l+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \}$



注 $l = n$のときは

$L \cap U = U$

つまり L は 開部分多様体

命題 部分多様体 $L \subset N$ は C^∞級多様体の構造をもつ

☺ （証明のスケッチ）

- L は相対位相について Hausdorff 位相空間
- 各点 $p \in L$ に対して、上の定義にある chart $(U; x_1, \cdots, x_n)$ をとるとき $(L \cap U; x_1, \cdots, x_\ell)$ は L の chart を定める。 （演習）
- 座標変換は C^∞級 （演習）

定理 ① $L \subset N$ が部分多様体のとき 包含写像 $i: L \to N$ は埋め込みである。

② 逆に $f: L \to N$ が埋め込みのとき、像 $f(L)$ は部分多様体。

☺ ① L に相対位相を入れると、$i: L \hookrightarrow N$ は像への同相。

部分多様体の定義にあらわれる chart $(U; x_1, \cdots, x_n)$ をとるとき

i の座標表示は $i(x_1, \cdots, x_\ell) = (x_1, \cdots, x_\ell, 0, \cdots, 0)$

$$J_i = \left[\begin{array}{c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow \ell\text{個} \\ \updownarrow n-\ell\text{個}\end{array}$$ は単射.

……

② は前回の定理を使う （演習）

臨界点（値）・正則点（値） critical point / value ／ regular point / value

$f: M \to N$ C^∞ map

定義 ① $p \in M$ が f の正則点 $\Longleftrightarrow$ d_pf が全射 $\Longleftrightarrow$ 点 p で f は沈め込み

$p \in M$ が f の臨界点 $\Longleftrightarrow$ d_pf が全射でない

② $q \in N$ が f の **正則値** $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(q)$ の全ての点 p が f の正則点.

$q \in N$ が f の **臨界値** $\Longleftrightarrow$ q は f の正則値でない

$\Longleftrightarrow$ $\exists p \in f^{-1}(q)$, p は f の臨界点.

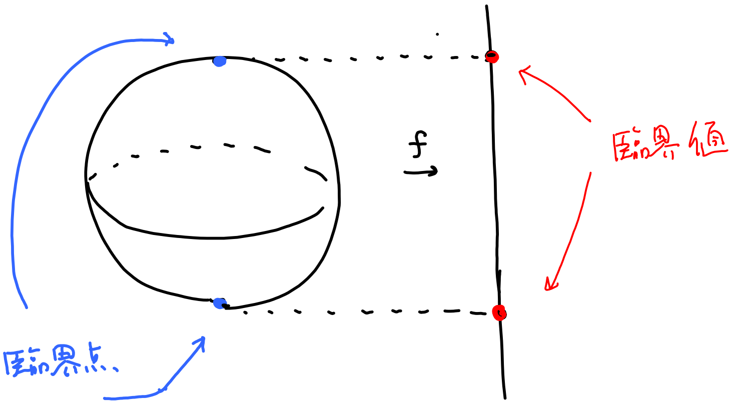
㊟ $f^{-1}(q) = \phi$ のときも q を正則値という

(例) $i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ $d_p i$ は決して全射にならない

⇝ $\forall p \in S^n$ は i の臨界点

$\forall q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$ は i の正則値

(例) 高さ関数 $S^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$



$d_p f$ が全射でない

$\Longleftrightarrow$ $p = (0,0,\pm 1)$

Sardの定理 $f: M \to N$ C^∞ map M: 第2可算公理を満たす

$\Rightarrow$ f の臨界値の集合は測度0である. ⇝ Nのほとんど全ての点は正則値である

㊟
- $A \subset N$ が測度0とは Nの各chart (U, φ) について $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ のLebesgue測度が0になること
- $B \subset \mathbb{R}^n$ のLebesgue測度が0 $\Longleftrightarrow$ Bは体積の和がいくらでも小さい可算個の直方体の族でおおわれる
  (外)
  つまり, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ 直方体の族 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$
  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$
- 測度0の部分集合の補集合は dense (稠密)

定理　$f: M^m \to N^n$　C^∞ map

$q \in N$ が正則値であるとき、$f^{-1}(q)$ は $m-n$ 次元部分多様体である。

∵ 沈め込みの局所座標表示についての前回の定理（レポート問題）をつかう。

$p \in f^{-1}(q)$　$\exists$ p を含む chart $(U; x_1, \dots, x_m)$　$x_i(p) = 0$

$\exists$ q　〃　$(V; y_1, \dots, y_n)$　$y_j(q) = 0$

s.t. f の座標表示は $(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (y_1, \dots, y_n)$
$= (x_1, \dots, x_n)$

よって $f^{-1}(q) \cap U = \{ a \in U \mid x_1(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \}$

//

射影空間　(projective space)

実射影空間　$\mathbb{R}P^n = \{ \ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は実1次元部分ベクトル空間$\}$

複素射影空間　$\mathbb{C}P^n = \{ \ell \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \ell$ は複素1次元部分ベクトル空間$\}$

$\mathbb{R}^N$ に埋め込まれていない多様体の例

商空間としての構成　$\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$　ℓ の生成元 v をとる　$\ell = \mathbb{R} \cdot v$

$\mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$v_1 = \lambda v_2$

従って　$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim$　但し $v_1 \sim v_2$
$\underset{\text{def.}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times,\ v_2 = \lambda v_1$

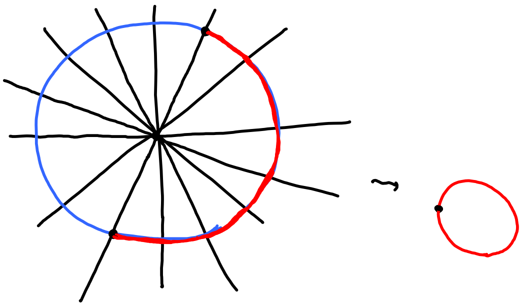
$\left(= \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \mathbb{R}^\times \right.$ とも書く $\left. \right)$

- $\mathbb{RP}^n$ には $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ からの商位相が入る

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n \qquad \text{自然な射影}$$

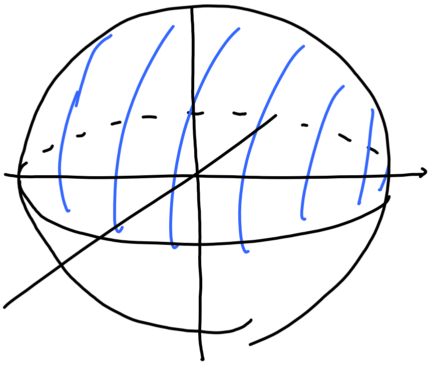
$$\left(U \subset \mathbb{RP}^n \text{ が open} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ の open} \right)$$

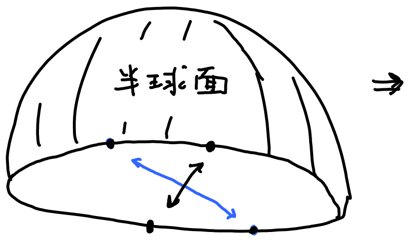
㊝ $\mathbb{RP}^1$ $\qquad \mathbb{RP}^1 \cong S^1/_{(x,y)\sim(-x,-y)} \cong S^1$

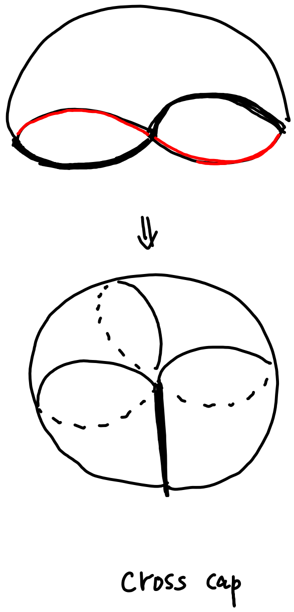


$\cong \mathbb{RP}^1$

㊝ $\mathbb{RP}^2$ $\qquad \mathbb{RP}^2 \cong S^2/\pm 1$







- $\mathbb{R}^3$ には埋め込めないことが知られている.

- 赤道 $\subset S^2$ の像の近傍 $\cong$ Möbius の帯

定理 $\mathbb{RP}^n$ はコンパクトハウスドルフ空間

(∵) $S^n \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ は全射連続写像

有界閉集合ゆえコンパクト $\Rightarrow$ $\pi\circ i(S^n)$ はコンパクト

ハウスドルフ性は やや難 （演習）

↑ 一般に商空間がハウスドルフであることを示すのは易しくない

局所座標 (chart)

$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値類を $[x_1, \cdots, x_{n+1}] = \pi(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n$ と書く

［ $x_1, \cdots, x_{n+1}$ を斉次座標という （homogeneous coordinate） ］

$U_i := \{ [x_1, \cdots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0 \}$ とおく.

- $\pi^{-1}(U_i) = \{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0 \}$ は open ゆえ, U_i は open

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$

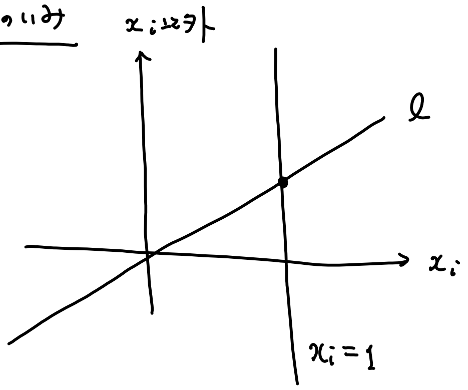
$$\varphi_i([x_1, \cdots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$ と定める.

⇝ φ_i は well-defined, 全単射, 連続

容易

$\varphi_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続になることから分かる. （演習問7）

φ_iのいみ



$\varphi_i(\ell) = \ell$ と超平面 $\{x_i = 1\}$ との交わり

φ_iの逆写像

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n) = [y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n]$$

$$= \pi(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n)$$

は連続 （☺ 連続写像の合成 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ ）

$\Longrightarrow$ φ_i は同相写像である.

- これらの chart は $\mathbb{RP}^n$ を覆う $\quad \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{RP}^n$

- 座標変換 $\quad \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は C^∞級

[$i=1, j=2$ のとき]

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \varphi_1([y_1, 1, y_2, \cdots, y_n])$$

$$= \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \cdots, \frac{y_n}{y_1} \right)$$

㊟ $\mathbb{RP}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の"コンパクト化"

$$\mathbb{RP}^n = \underset{\sim}{U_1} \sqcup \{[0, x_2, \dots, x_{n+1}]\} \cong \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1}$$

$\mathbb{RP}^n$ の open, dense subset になっている

⤳ 帰納的に

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{R} \sqcup \underset{\underset{1点}{\sim}}{\mathbb{R}^0}$$

なる分解をもつ.

$\mathbb{CP}^n$ も同様

$$\mathbb{CP}^n = \{ \ell \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \ell \text{ は一次元 } \mathbb{C} \text{ 部分空間} \}$$

$$= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \Big/ \underset{\sim}{\mathbb{C}^\times}$$

$v_1 \sim v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times \quad v_2 = \lambda v_1$

なる同値関係で割る

chart

$$U_i = \{ [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n \mid x_i \neq 0 \}$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad \varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

コンパクト性

$$\underset{\underset{コンパクト}{\sim}}{S^{2n+1}} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n$$ の像故コンパクト

Hausdorff

座標変換は C^∞級

演習 (さらに座標変換は正則であることもいえる

⤳ 複素多様体)

例 $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$

$$U_1 = \{ [x_1, x_2] \mid x_1 \neq 0 \} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}$$
$$[x_1, x_2] \longmapsto x_2 / x_1 = z$$
$$U_2 = \{ [x_1, x_2] \mid x_2 \neq 0 \} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}$$
$$[x_1, x_2] \longmapsto x_1 / x_2 = w$$

座標変換は $w = z^{-1}$

⇝ 構成から $\mathbb{CP}^1$ と リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は 微分同相

$$\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}} \cong S^2$$

Hopf 写像 (Hopf fibration)

合成 $S^{2n+1} \overset{i}{\subset} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow[\pi]{} \mathbb{CP}^n$ を Hopf 写像 という

定理 (演習問題 33, 56 参照)

Hopf 写像 $f : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ は C^∞級の 沈め込み写像 であり

${}^\forall q \in \mathbb{CP}^n$ に対して $f^{-1}(q)$ は S^1 と diffeo である.

(∵)

- 沈め込み については 演習 56の 解答参照.
- $f^{-1}([x_1, \cdots, x_{n+1}]) = \{ (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1}) \in S^{2n+1} \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times \}$

$$\cong \{ \lambda \in \mathbb{C}^\times \mid |\lambda|^2 (|x_1|^2 + \cdots + |x_{n+1}|^2) = 1 \}$$
$$\cong S^1$$

(diffeoになることは具体的に写像を書けばわかる)

- $n = 1$のとき

$S^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ Hopf map

⇝ S^2 上の 非自明な S^1束
$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の 生成元

7回目

2020年6月10日　10:21

M : C^∞級多様体

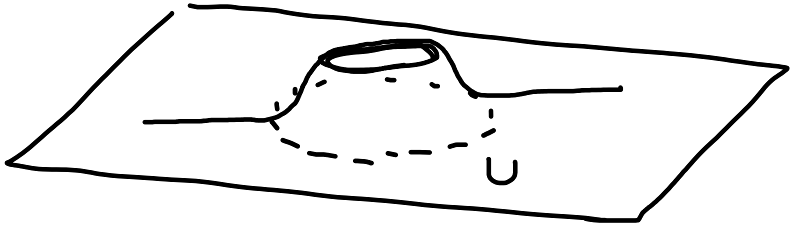
① M上の定数でないC^∞級関数は存在するか？

② Mは（十分大きいnに対し）$\mathbb{R}^n$に埋め込めるか？

②が正しいなら（$\mathbb{R}^n$上のC^∞級関数を制限して）①もいえる

隆起関数 (bump function)

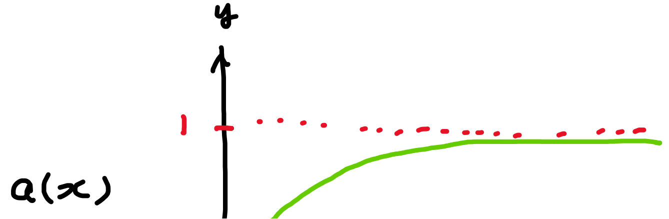
こぶ



$$a(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

小さな open set U

上のみで0でない関数



関数

$x=0$ で 連続

$$a'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\, e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x \underset{=}{<} 0 \end{cases}$$

$t = 1/h$

$x=0$ ても 微分可能 :

$$\text{右微分} = \lim_{h \to +0} \frac{e^{-1/h} - 0}{h} = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t}}{1/t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

$$\text{左微分} = 0$$

以下帰納的に　$a(x)$ は k回 微分可能で

$$a^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(1/x)\, e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

但し P_k は $1/x$ の多項式　　　　が 言える

ただし P_k は x の多項式

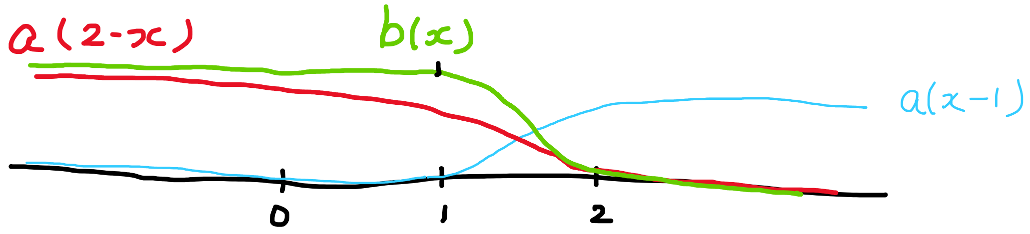
┘

$\Rightarrow$ $a(x)$ は C^∞ 級

┘

$$b(x) = \frac{a(2-x)}{\underbrace{a(x-1)+a(2-x)}_{\overset{\vee}{0}}}$$

は C^∞ 級



$$\begin{cases} b(x) = 1 & \boxed{x \leqq 1} \\ 0 < b(x) < 1 & 1 < x < 2 \\ b(x) = 0 & x \geqq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^m$ 上の bump function　$\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \underbrace{b\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)}$$ とおく　$x \in \mathbb{R}^m$

$x=0$ のまわりで C^∞ 級 であることは

$x=0$ のまわりで 定数 1 であることから

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = 1 & \text{if} \quad |x| \leq \varepsilon \\ 0 < f_\varepsilon(x) < 1 & \text{if} \quad \varepsilon < |x| < 2\varepsilon \\ f_\varepsilon(x) = 0 & \text{if} \quad |x| \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

M: C^∞ mfd

$p \in M$, (U, φ): p を含む chart

$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^m$$

open

$\varphi(p) = 0$ としてよい

$$\overline{B_{2\varepsilon}} = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqq 2\varepsilon \} \subset U'$$ となる ε をとる

$f : M \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(\varphi(x)) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

とおく

fは C^∞級. $M = \underbrace{U}_{\text{open}} \cup \underbrace{(M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}}))}_{\text{open}}$ open covering

$\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$ はコンパクト

Mはハウスドルフゆえ $\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$ はMの閉

$$\begin{cases} \cdot\ f|_U \text{ は } C^\infty \text{級} \\ \cdot\ f|_{M\setminus\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})} = 0 \text{ は } C^\infty \text{級} \end{cases}$$ //

台(support) $f\ X \to \mathbb{R}$ conti (連続)

$\mathrm{Supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ を f の台という.

↑ closure をとっていることに注意!

上の bump function の場合 $\mathrm{Supp} f = \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$

命題 ∀$p \in M$, ∀U: pの open nbd (開近傍)

$\Rightarrow$ ∃V pの open nbd ∃f M上の C^∞級関数

s.t ① $\overline{V} \subset U$ ② $f|_{\overline{V}} = 1$

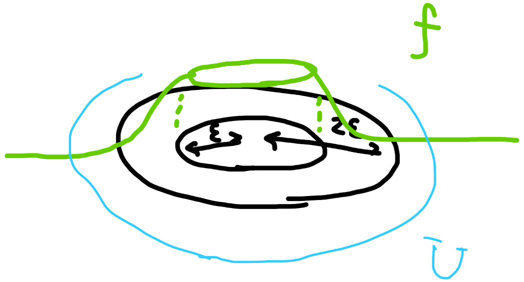
③ $0 \leq f(x) < 1$ $x \notin \overline{V}$ ④ $\mathrm{Supp} f \subset U$

∵ 必要なら Uを小さくとり直して Uは chart (U, φ) としてよい

上のように bump function fを定める ($\overline{B_{2\varepsilon}} \subset U'$ なる εをとって)

$V = \varphi^{-1}(B_\varepsilon)$ とおくと ①〜④が成立

① $\overline{V} = \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon})$ はいえるので $\overline{V} \subset U$



② $f|_{\overline{V}} = f|_{\varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon})} = 1$　③ $x \notin \overline{V}$ のとき $0 \leq f(x) < 1$

④ $\mathrm{Supp} f = \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}}) \subset U$

//

埋め込み定理 : M : コンパクト C^∞ mfd

十分大きい n に対して ${}^\exists g : \underbrace{M \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ C^∞級 埋めこみ が存在

⇝ nコの M上の関数

(証明)

$p \in M$ に対して pを含む chart (U_p, φ_p) をとる

前命題より

$$\left.\begin{array}{ll} {}^\exists V_p & p\text{の近傍} \\ {}^\exists f_p \quad M \to \mathbb{R} & C^\infty\text{級} \end{array}\right\} \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} p \in V_p \subset \overline{V_p} \subset U_p \\ f_p|_{\overline{V_p}} = 1 \\ \mathrm{Supp}\, f_p \subset U_p \end{array}$$

$x \notin \overline{V_p}$ のとき $0 \leq f_p(x) < 1$

$$\bigcup_{p\in M} V_p = M$$ open covering

Mのコンパクト性から $M = V_{p_1} \cup \cdots \cup V_{p_k}$ とする

U_{p_i} 上の座標を $\varphi_{p_i} = (x_{i1}, \cdots, x_{im})$ とおく.

$$g_{ij}(y) := \begin{cases} f_{p_i}(y)\cdot x_{ij}(y) & y \in U_{p_i} \\ 0 & y \notin U_{p_i} \end{cases}$$

とおくと g_{ij} は C^∞ 級

∵ $M = U_{p_i} \cup (M \setminus \mathrm{Supp}\, f_{p_i})$: open cover

・U_{p_i} 上では C^∞ 級 $\Big\}$ $\Rightarrow$ C^∞ 級

・ $M \setminus \mathrm{Supp}\, f_{p_i}$ 上では 0 $)$ $/\!/$

$$g : M \to \mathbb{R}^{k+mk} \text{ を } g = \Big(\underbrace{f_{p_1}, \cdots, f_{p_k}}_{\text{bump fcn}},\ \overbrace{g_{1,1}, \cdots, g_{1,m}}, \cdots \cdots \overbrace{g_{k,1}, \cdots, g_{k,m}} \Big)$$

とおくと g が埋め込みになることを示す.

M はコンパクトなので g が単射はめ込みを示せばよい

<u>はめ込み</u>

$$g_{ij}\Big|_{V_{p_i}} = \underbrace{f_{p_i}\Big|_{V_{p_i}}}_{\overset{\|}{1}} \cdot x_{ij} = x_{ij}$$

V_{p_i} 上での g の座標表示

$$g : (x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (*, \cdots, *, * \cdots *, \cdots, \overbrace{x_1, \cdots, x_m}^{i\text{番目のブロック}}, \cdots, * \cdots *)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad}_{m}\qquad\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{m}\qquad\qquad\underbrace{\qquad}_{m}$

Jg は 単射

<u>単射</u>

$g(y_1) = g(y_2)$ とする

$y_1 \in V_{p_i}$ なる i をとると $\underline{f_{p_i}(y_1)} = 1$ ゆえ $\underline{f_{p_1}(y_2)} = 1$

$\therefore\ y_2 \in \overline{V_{p_i}} \subset U_{p_i}$

$\therefore\ y_1, y_2$ は chart U_{p_i} に入る　　$y_1, y_2 \in \overline{V_{p_i}}$ ゆえ

$$x_{ij}(y_1) = g_{ij}(y_1) = g_{ij}(y_2) = x_{ij}(y_2) \quad (\forall j)$$

$$\Longrightarrow\ y_1 = y_2 \quad //$$

Whitney の埋め込み定理

M 第2可算公理をみたす m次元多様体

$\exists\ g: M \to \mathbb{R}^{\underline{2m+1}}$ C^∞級のうめこみで $\underline{g(M) が 閉集合}$

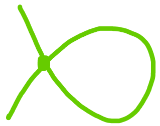
になるものが存在.

↑

M: コンパクト

なら 自動的

$M^m \to \mathbb{R}^{2m}$ はめ込めても 自己交差



1の分割

X 位相空間

定義 (1) 部分集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が X の <u>被覆</u> (covering)

$$\iff \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha = X$$

(2) 2つの covering $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ に対して

$\{V_\alpha\}$ が $\{W_\beta\}$ の 細分 (refinement) とは

$^\forall \alpha \in A \quad ^\exists \beta \in B$ s.t. $V_\alpha \subset W_\beta$ が成立すること

(3) 部分集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が <u>局所有限</u> (locally finite) とは

$^\forall x \in X \quad ^\exists x$ の open nbd U

s.t. $U \cap V_\alpha \neq \phi$ なる $\alpha \in A$ が 高々有限個

<u>例</u> $\mathcal{U} = \{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は locally finite な $\mathbb{R}$ の ヒフク

$\mathcal{V} = \{ (a, b) \mid a < b < a+1 \}$ は $\mathcal{U}$ の 細分 だが locally finite でない $\mathbb{R}$ の ヒフク

<u>定義</u> M: C^∞ mfd $\quad \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ open covering

$\mathcal{U}$に従属する<u>1の分割</u> (partition of unity) とは

C^∞級関数の族 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($\rho_\lambda : M \to \mathbb{R}$, C^∞級) で

① $0 \leqq \rho_\lambda(x) \leqq 1$

② $\{\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は locally finite な M の被覆で、

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の細分

③ $$\underbrace{\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(x)} = 1$$

Supp ρ_λ は局所有限なので
この和は x をとめると有限和

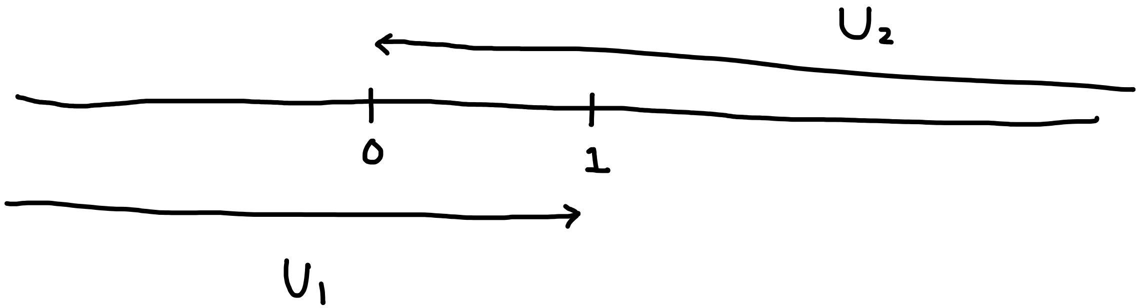
㊟ $\{\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda\}$: locally finite $\Longleftrightarrow$ $\{\rho_\lambda^{-1}(0,1]\}_{\lambda\in\Lambda}$ が locally finite

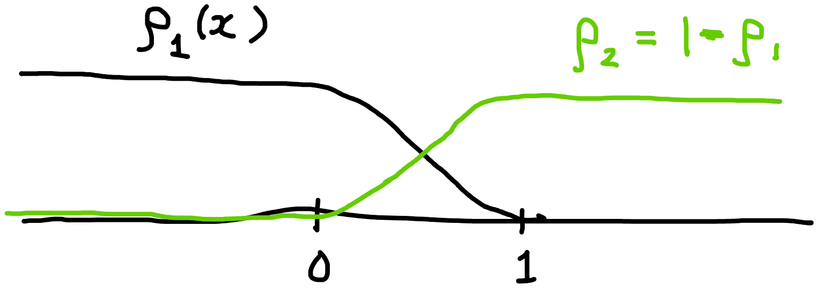
$\|$

P_λ $(0,1]$

㊀例 $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (0, \infty)$ に従属する 1の分割

$$\underset{U_1}{\underset{\shortparallel}{(-\infty, 1)}} \qquad \underset{U_2}{\underset{\shortparallel}{(0, \infty)}}$$





$\mathrm{Supp}\,\rho_1 \subset U_1$, $\mathrm{Supp}\,\rho_2 \subset U_2$

$\rho_1 + \rho_2 = 1$

定義 位相空間 X が σ-compact とは

$^{\exists}$コンパクト集合 $K_1, K_2, K_3, \cdots \subset X$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

(コンパクト集合の可算和)

「命題 位相多様体 M について 次は 同値

命題　位相多様体 M に対して 次は同値

(a)　M は σ-compact

(b)　M は第2可算公理をみたす（可算開基がある）

定理　M: 第2可算公理をみたす C^∞ mfd

$\forall$ open covering $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して それに従属する $\overset{\exists}{1}$ の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する

さらにここで
- Λ は可算集合
- $\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda$ はコンパクト

となるようにとれる.

補題　M : σ-compact（$\Longleftrightarrow$ 第2可算）mfd

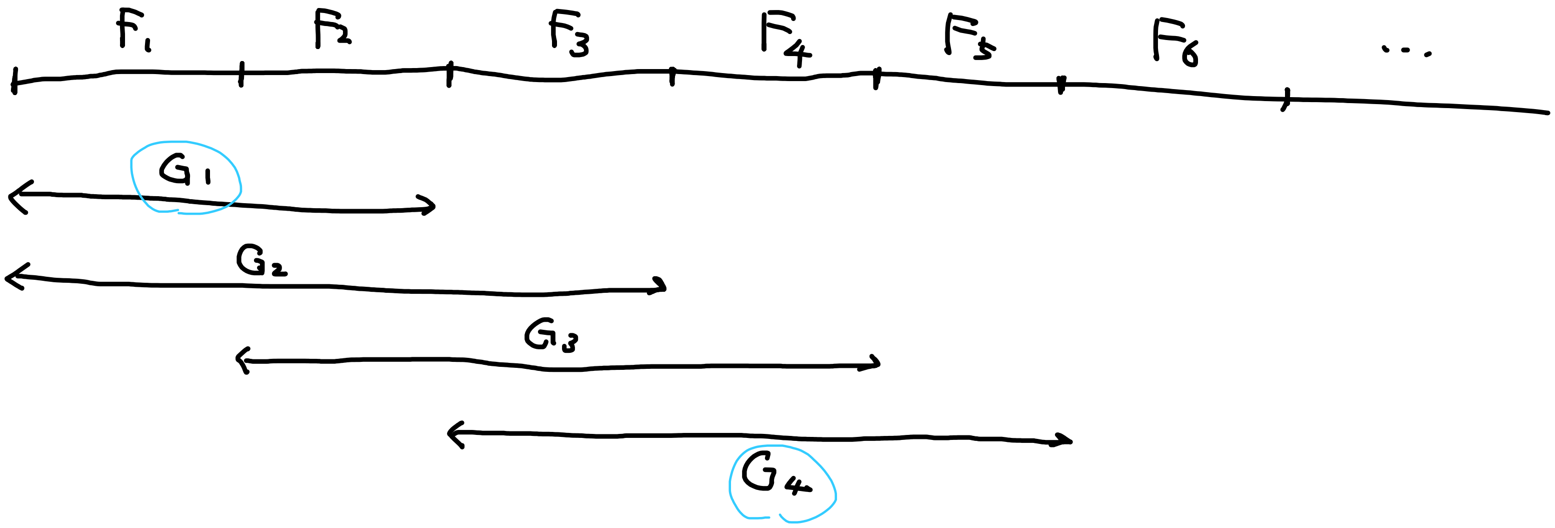
次をみたす部分集合族 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する.

①　F_i はコンパクト　G_i は open　$F_i \subset G_i$

② $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

③ $G_i \cap G_j = \phi$ if $|i-j| \geqq 3$

(イメージ図)



(証明) (I) $\forall K \subset M$ コンパクト集合 $^{\exists}K$の open nbd W

st $\overline{W}$ が コンパクト になるもの が 存在する

各 $x \in K$ に対して x の open nbd $U(x)$ で $U(x)$ コンパクト

(既にやった)

K は $U(x)$ でおおわれる. コンパクト性から

$$K \subset U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_\ell) =: W \text{ とおく}$$

$$\overline{W} = \overline{U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_\ell)} \underset{\text{演習}}{=} \underbrace{\overline{U(x_1)} \cup \cdots \cup \overline{U(x_\ell)}}_{\text{コンパクトの有限和はコンパクト}}$$

(II) M が σ- compact ゆえ $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, K_j はコンパクト

と書ける.

K_n を $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ でおきかえて $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ と仮定してよい

$\exists$ open set の増大列 $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots$ で

$$\begin{cases} K_i \subset W_i \end{cases}$$ をみたすもの

($\overline{W_i}$ はコンパクト, $\overline{W_i} \subset W_{i+1}$ が存在.

∵ W_1 は (I) から存在する

W_2 は $\overline{W_1} \cup K_2$ の open nbd で $\overline{W_2}$ がコンパクトになるもの
とる. ((I) から存在)

W_3 は $\overline{W_2} \cup K_3$ の 〃 で $\overline{W_3}$ がコンパクトになるもの

以下帰納的につづける //

(III) $F_i = \overline{W_i} \setminus W_{i-1}$ (但し $F_1 = \overline{W_1}$)

$G_i = W_{i+1} \setminus \overline{W_{i-2}}$ (但し $G_1 = W_2$, $G_2 = W_3$)

とおけば補題成立.

- F_i は コンパクト集合 W_i の 閉部分集合ゆえ コンパクト

- G_i は open で $F_i \subset G_i$

- $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ であること.

∵ $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$

$^\forall x \in M$ に対して $x \in W_i$ となる i のうち 最小のものをとると

$x \in W_i \setminus W_{i-1} \subseteq F_i$

- $G_i \cap G_j = \phi$ if $|i-j| \geq 3$ は とり方から明らか.

定理の証明　M は 第2可算 $\Leftrightarrow$ σ- compact

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$: 与えられた open covering

$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$: 補題にある covering

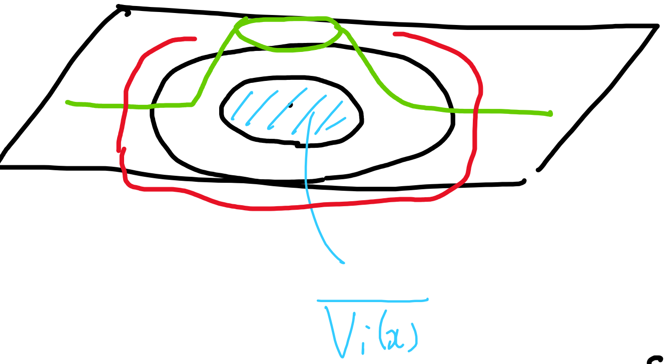
各 $x \in F_i$ に対して　$^{\exists}\alpha(x) \in A$　s.t.　$x \in U_{\alpha(x)}$

$x \in U_{\alpha(x)} \cap G_i$ ← open nbd of x

前半に示した命題より　$^{\exists}V_i(x)$: x の open nbd,

$\overline{V_i(x)} \subset U_{\alpha(x)} \cap G_i$

$^{\exists}f_{i,x}$. $M \to \mathbb{R}$　C^∞ 級



s.t.

- $f_{i,x}\big|_{\overline{V_i(x)}} = 1$,
- $y \notin \overline{V_i(x)}$ のとき $0 \leq f_{i,x}(y) < 1$
- $\mathrm{Supp}\, f_{i,x} \subset U_{\alpha(x)} \cap G_i$

Supp $f_{i,x}$ は
コンパクトにとれた

$V_i(x)$ たちは F_i をおおう $\Rightarrow$ F_i のコンパクト性から

$$F_i = \overline{V}_i(x_1) \cup \cdots \cup \overline{V}_i(x_{N_i})$$

- $V_{i,j} := V_i(x_j)$ とおく
- $f_{i,j} := f_{i,x_j}$ とおく

$\underline{\mathrm{Supp}\, f_{i,j} \subset G_i \cap U_{\alpha(x_j)}}$

<u>Claim</u> $\{\mathrm{Supp}\, f_{i,j}\}_{i,j}$ は locally finite

$i=1,2,3,\ldots \qquad 1 \le j \le N_i$

∵ $\mathrm{Supp}\, f_{i,j} \subset G_i$ に注意

G_i と交わる $\mathrm{Supp}\, f_{k,l}$ は高々有限である

$\Big($ ∵ $\mathrm{Supp}\, f_{k\ell} \subset G_k$ なので $\mathrm{Supp}\, f_{k\ell} \cap G_i \neq \phi$ ならば $|i-k| \leqq 2$ $\Big)$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} f_{ij}(x)$$ は 局所的に有限和

⇝ $f(x)$ は well-defined な C^∞級関数

$f_{ij}\big|_{\overline{V_{ij}}} = 1$ で V_{ij} は M をおおうので $\underline{f(x) > 0}$ $({}^\forall x)$

$$\rho_{ij}(x) := \frac{f_{ij}(x)}{f(x)}$$ は C^∞級 $\displaystyle\sum_{i,j} \rho_{ij}(x) = 1$

さらに $\{\mathrm{Supp}\, \rho_{ij} = \underset{\text{コンパクト}}{\mathrm{Supp}}\, f_{ij}\}$ は locally finite, 可算 covering

で あって $\{U_\alpha\}$ の 細分 に なっている "

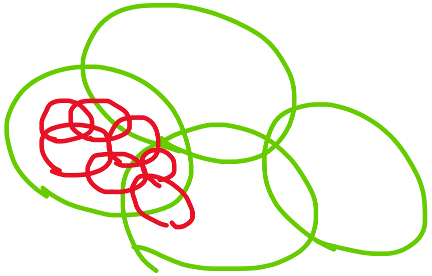
定理' M : 第2可算 C^∞ mfd $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ open covering

$\Rightarrow$ $\exists \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 1の分割 s.t. ・$\{\mathrm{Supp}\, f_\alpha\}$ は locally finite

$f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ C^∞級 ・$\mathrm{Supp}\, f_\alpha \subset U_\alpha$

・$\displaystyle\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$

㊟ つまり、台のコンパクト性を要求しなければ、添字集合を同じにとれる



∵ もとの定理の1の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる

$\mathrm{Supp}\, \rho_\lambda \subset U_{\alpha(\lambda)}$ なる $\alpha(\lambda) \in A$ を選ぶ

$$f_\alpha := \sum_{\underbrace{\lambda \cdot \alpha(\lambda) = \alpha}} \rho_\lambda$$ とおく

もしこういう λ がなければ $f_\alpha = 0$ とおく

- これは局所有限和なので f_α は C^∞級 で $\underline{\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1}$

- $$\mathrm{Supp}\, f_\alpha = \bigcup_{\lambda\ \ \alpha(\lambda)=\alpha} \mathrm{Supp}\,\rho_\lambda$$

∵ $$\{f_\alpha \neq 0\} = \bigcup_{\alpha(\lambda)=\alpha} \underbrace{\{\rho_\lambda \neq 0\}}_{\text{locally finite}}$$ の閉包をとる

一般に locally finite な部分集合族 $\{G_\lambda\}$ に対して

$$\overline{\bigcup_\lambda G_\lambda} = \bigcup_\lambda \overline{G_\lambda}$$ をつかうとよい

- $\{\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda\}$ が局所有限なので $\{\mathrm{Supp}\, f_\alpha\}$ も局所有限

//

㊟ **パラコンパクト性**

X 位相空間 が paracompact $\overset{\text{def.}}{\iff}$ X の任意の open covering $\{U_\alpha\}$ に対して、局所有限な open covering $\{V_\beta\}$ で $\{U_\alpha\}$ の細分になっているものが存在する.

- 位相空間 X が σ-compact, locally compact, Hausdorff
  $\Rightarrow$ X は paracompact　（先の補題をつかう）

（特に 第2可算 mfd は パラコンパクト）

- paracompact 位相多様体の 連結成分 は 第2可算（つまり σ-cpt）

開集合になる

- 1の分割は パラコンパクト多様体でも存在

8回目

2020年6月17日　10:21

Lie群

(C^∞級) Lie群 とは C^∞級多様体 G であって 群の構造をもち,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{積} : & G \times G \longrightarrow G \\ & (x, y) \longmapsto x \cdot y \\ \text{逆元} : & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^{-1} \end{array}\right\}$$

が C^∞級 map になるもの

㊟ x を左からかける写像 $G \longrightarrow G$, $z \longmapsto x z$ は C^∞級微分同相 diffeo

(∵ 逆写像 $z \longmapsto x^{-1} z$ も C^∞級)

同様に xを右からかける写像 $z \longmapsto z \cdot x$ も diffeo

(例) $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ general linear group

n次正方行列（成分は実数）

- $GL(n, \mathbb{R}) \underset{\text{open subset}}{\subset} M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ⇝ 開部分多様体の構造をもつ

- 積及び逆元をとる写像は C^∞ 級

$$A^{-1} = \frac{1}{\underset{\substack{\neq \\ 0}}{\det A}} \left(A\text{の余因子行列} \right)$$

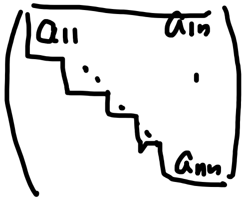
(例) $O(n) = O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = E_n \}$

直交群　　　　直交行列

- $O(n)$ は群になる（易しい）

- $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の 閉部分多様体 である

$$F : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{n次対称行列\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$



$F(A) = {}^tA \cdot A$ とおく

$${}^t({}^tA\ A) = {}^tA \cdot A$$

$O(n) = F^{-1}(E_n)$ である （$\rightsquigarrow$ $O(n)$ は閉）

E_n が F の正則値であることを示せばよい

<u>Fの微分</u>

$$d_AF(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(A+\varepsilon X) - F(A)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{{}^t(A+\varepsilon X) \cdot (A+\varepsilon X) - {}^tA \cdot A}{\varepsilon}$$

$$= {}^tAX + {}^tXA \quad 」$$

対称行列になっている

Claim $A \in O(n)$ に対して $d_AF :$

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \{n\text{次対称行列}\} \arrow[d, equal] \\ T_A M_n(\mathbb{R}) & T_{F(A)}\{n\text{次対称行列}\} \end{tikzcd}$$

は全射

∵ B : 対称行列 $B = {}^tAX + {}^tXA$ をときたい

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\tfrac{1}{2}B = {}^tAX} \\ \tfrac{1}{2}B = {}^tX\cdot A \end{aligned}\right\} \text{ とけばよい} \longrightarrow \begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}\,{}^tA^{-1}\cdot B \\ {}^tX &= \tfrac{1}{2}BA^{-1} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ みたす

O(n)の接空間

$$\iota : O(n) \hookrightarrow M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

submfd

- $T_A O(n)$ は $T_A M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間と思える.

$$\overset{\shortparallel}{M_n(\mathbb{R})} \quad (\because \ d_A i \text{ が単射})$$

- $$T_A O(n) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Ker}\left(d_A F \quad T_A M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \right)$$

一般に $f \ M \to N$ C^∞級 $q \in N$ が正則値

$f^{-1}(q)$. submfd で $T_p f^{-1}(q) = \mathrm{Ker}(d_p f)$ になる

$\subset T_pM$

$$= \left\{ X \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tA \cdot X + {}^tX \cdot A = O \right\}$$

Lie環 : Lie群の単位元での接空間を Lie環 という.

$$\mathfrak{o}(n) = T_{E_n}O(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underbrace{X + {}^tX = 0}_{\text{交代行列}} \}$$

↑ 次元は $\frac{n(n-1)}{2}$

$\mathfrak{o}(n)$ は かっこ積（交換子積）$[\cdot,\cdot]$ でとじている （演習）

$$[A, B] = AB - BA$$

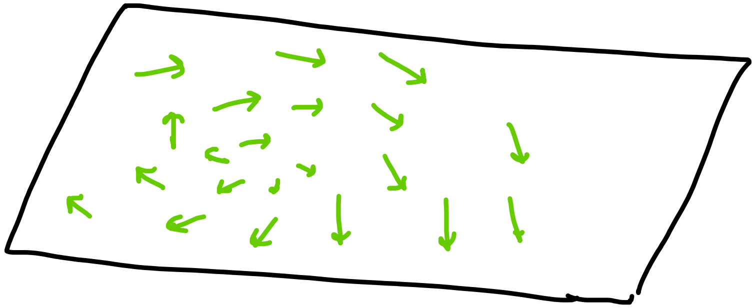
$$A, B \in \mathfrak{o}(n) \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{o}(n)$$

$$U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} \cdot A = E_n \}$$ unitary群

ベクトル場　　M : C^∞ mfd

定義　M上の ベクトル場 とは 各点 $p \in M$ に対して 接ベクトル

$X_p \in T_pM$ が与えられたもの



速度場，電磁場，…

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \boxed{\bigsqcup_{p\in M} T_pM} = TM \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & X_p \end{array}$$

なる mapと思える

これに適当な位相・座標を入れて C^∞ mfd にできる 接ベクトル束

$(U; x_1, \cdots, x_m)$ chart

$p \in U$ に対して $X_p = \xi_1(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + \xi_m(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ $\updownarrow$ $\begin{bmatrix} \xi_1(p) \\ \vdots \\ \xi_m(p) \end{bmatrix}$

と書ける（座標表示）.

各 ξ_i は U 上の関数

$\xi_i = \xi_i(x_1, \cdots x_m)$

（任意の chart について）

ここに表れる ξ_i が U 上の C^∞級関数になるとき

X を C^∞級ベクトル場 という

この定義は座標 $x_1,\dots,x_m$ のとり方によらない

$$∵ \quad \sum_i \underbrace{\xi_i(p)}_{C^\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i,j} \overbrace{\xi_i(p) \underbrace{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}_{C^\infty\text{級}}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$$

ベクトル場による関数の微分

f: M上のC^∞級関数, $X = \{X_p\}_{p \in M}$: C^∞級ベクトル場

$$\rightsquigarrow \quad X(f)(p) := \underbrace{X_p}_{\substack{\uparrow \\ \text{点}p\text{での方向微分}}}(f) \quad \text{とおく}$$

$X(f)$ は M上の C^∞級関数

$$C^\infty(M) := \{M\text{上の } C^\infty\text{級関数}\}$$

(∵) 座標をとく

$$X_p = \sum \underbrace{\xi_i(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

$$f = f(x_1, \cdots, x_m)$$

$$X(f) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\xi_i(p)}_{C^\infty} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{C^\infty}$$

定理 C^∞級ベクトル場 X による微分 $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

は 次の性質をもつ

① $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

② $X(fg) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$ (Leibniz rule)

逆に ①, ② をみたす写像 $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は

ある一意な C^∞級ベクトル場 X による微分である

∵

- ベクトル場による微分が①, ②を満たすことは方向微分の性質から明らか

- ①, ②をみたす $\phi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ が与えられたとする

<u>Step 1</u> $f, g \in C^\infty(M)$ がある点 p の open nbd U 上で一致すれば

$$\phi(f)(p) = \phi(g)(p)$$

∵ $\exists\, C^\infty\text{-fcn} : \rho : M \to \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}\rho(p) = 1 \\ \mathrm{Supp}\,\rho \subset U\end{array}\right)$ なるものをとる

$$\rho(x)\cdot\bigl(f(x) - g(x)\bigr) = 0 \qquad {}^\forall x \in M$$

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{線形性より}}}{=} \phi(\rho \cdot (f-g)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leibniz}}}{=} \phi(\rho)\cdot\underline{(f-g)} + \underline{\rho}\cdot\phi(f-g)$$

点 p で値をみて　$\phi(f-g)(p) = 0$

つまり　$\phi(f)(p) = \phi(g)(p)$　//

<u>Step 2</u>　f : 点 p の open nbd U 上の C^∞ 関数

$\Rightarrow$ ${}^\exists \tilde{f} : M \to \mathbb{R}$: C^∞ 関数　${}^\exists p$ の open nbd $V \subset U$

s.t. $f|_V = \tilde{f}|_V$

(演習)　V 上で 1 になる bump fcn ρ を f にかければよい

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \rho(x)\, f(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Step 3 1, 2 より p の近傍で定義された C^∞級関数 f に対して

$\phi(\tilde{f})(p)$ は $\tilde{f}$ のとり方によらずに決まる実数

$f \longmapsto \phi(\tilde{f})(p)$ は点 p での方向微分

$\exists!$ $X_p \in T_pM$ s.t. $\phi(\tilde{f})(p) = X_p(f)$

(㊟ $f \in C^\infty(M)$ のときは $\phi(f)(p) = X_p(f)$)

Step 4 $\{X_p\}$ が C^∞級であること

(なめらか)

$(U; x_1, \cdots, x_m)$: pの座標近傍 $\tilde{x}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$

pのある open nbd V 上で x_i と一致する C^∞ fcn

$q \in V$ に対して

$$X_q(x_i) = \underbrace{\phi(\tilde{x}_i)}_{C^\infty \text{ fcn}}(q)$$

一方で

$$X_q = \sum_i \underline{X_q(x_i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$$

より X は なめらか。

括弧積 (交換子積)

X, Y : C^∞ ベクトル場 $f \in C^\infty(M)$

$$[X, Y] f := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

と定める

$[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は 上の①,②をみたす

∵ ①は明らか，②をみる

$$
\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(\underline{fg})) - Y(X(fg)) \\
&= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\
&= \underline{X(Y(f))\cdot g} + \underline{Y(f)\cdot X(g)} \\
&\quad + X(f)\cdot Y(g) + f\ X(Y(g)) \\
&\quad - \underline{Y(X(f))\cdot g} - X(f)Y(g) - \underline{Y(f)\cdot X(g)} \\
&\quad - f\ Y(X(g))
\end{aligned}
$$

$$= \left(X(Y(f)) - Y(X(f))\right) \cdot g$$

$$+ \ f \cdot \left(X(Y(g)) - Y(X(g))\right)$$

$$= \left([X, Y]f\right) \cdot g + f \cdot \left([X, Y] g\right)$$

//

⇝ $[X, Y]$ は M 上の C^∞ 級ベクトル場

局所座標で計算 (演習)

$$X = \sum_i \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad Y = \sum_i \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とおくとき

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\underset{\uparrow}{\boxed{\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}}} - \underset{\uparrow}{\boxed{\eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

← [$Y_p = \sum_i \eta_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

の略記

X で η_j を ビブン　　　Y で ξ_j を ビブン

$$\mathfrak{X}(M) := \{ M 上の\ C^\infty 級\ ベクトル場 \}$$

- $\mathfrak{X}(M)$ は $\underbrace{C^\infty(M)}_{可換環}$ 上の加群の構造をもつ

$f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$,　　$(f \cdot X)_p = f(p) X_p$

は C^∞ ベクトル場

- $\mathfrak{X}(M)$ は かっこ積 $[\cdot, \cdot]$ をもつ. ($\rightsquigarrow$ Lie環 になる)

$\mathbb{R}$上の Lie環

① $[X, Y]$ は X 及び Y について $\mathbb{R}$ 上線形

② $[X, Y] = -[Y, X]$

③ (Jacobi identity)

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $[X, \cdot\,]$ 이 Leibniz rule 를 지킨다
②의 표현

$$[\underset{\sim}{X}, [Y, Z]] = [[\underset{\sim}{X}, Y], Z] + [Y, [\underset{\sim}{X}, Z]]$$

④ $$[X, fY] = X(f)\,Y + f\,[X, Y]$$

$$[gX, Y] = -Y(g)\,X + g\,[X, Y]$$

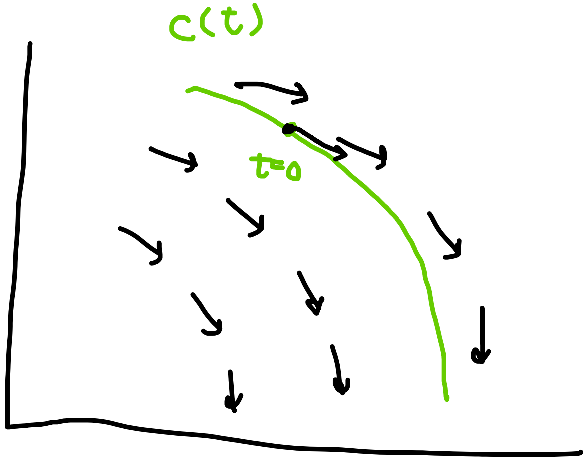
$f, g \in C^\infty(M)$

9回目

2020年6月24日　10:27

積分曲線　X : C^∞級ベクトル場 on M　($\forall p \in M$ に対し $X_p \in T_pM$ が与えられており p に C^∞級に依存する)

X を「速度場」と思ったときの流れ



$c : (a,b) \longrightarrow M$　C^∞級曲線

が X の積分曲線 (integral curve) とは

$\forall t \in (a,b)$ に対し　$\underbrace{\frac{dc}{dt}(t)}_{速度} = \underbrace{X_{c(t)}}_{X の c(t) での値}$　が成立すること

- 局所座標をとると　$c(t)$ の方程式は次のようになる

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\xi_i(x)$ は $U \underset{open}{\subset} \mathbb{R}^m$

C^∞級 fcn

上の C 級 fcn

$$c(t) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$$ 座標表示、

$$(*) \qquad \frac{dc_i}{dt}(t) = \xi_i(c_1(t), \cdots, c_m(t)) \qquad i=1,2,\cdots,m$$

［常微分方程式の解の存在と一意性］

$$(**) \quad \text{初期条件} \quad c(0) = (c_1(0), \cdots, c_m(0)) = \underbrace{(x_1^0, \cdots, x_m^0)}_{\substack{\text{given point} \\ \| \\ x^0}} \in U$$

ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(*)$, $(**)$ をみたす C^1級関数

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$$ が一意に存在する

㊟ 通常は $\xi_i(x)$ が Lipschitz 連続 ← ξ_i は C^∞級 なので OK.

$$|\xi_i(x) - \xi_i(y)| \leqq {}^\exists K |x-y| \qquad x, y \in (x^0 \text{ の近傍})$$

を仮定して 逐次近似法

$$\begin{cases} c_{n+1}(t) = x^0 + \int_0^t \xi(c_n(s))\,ds \\ c_0(t) \equiv x^0 \end{cases}$$

← 縮小写像

で解ける

注 $\frac{dc}{dt} = \xi(c(t))$ をつかうと $c : C^1$級 $\Rightarrow$ $c : C^2$級 $\Rightarrow \cdot \Rightarrow$ $c : C^\infty$級

命題

$x : (a,b) \longrightarrow M$ $\quad t_0 \in (a,b) \cap (c,d)$

$y : (c,d) \longrightarrow M$

x, y が X の積分曲線で, $x(t_0) = y(t_0)$

$\Longrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in (a,b) \cap (c,d)$

∵ $I = (a,b) \cap (c,d) \ni t_0$

$$J := \{ t \in I \mid \underline{x(t) = y(t)} \} \ni t_0$$

- J は I の閉集合 ∵ M は Hausdorff ゆえ 対角集合 $\Delta \subset M \times M$ は閉
  $J = (x|_I, y|_I)^{-1} \Delta$ ゆえ J は閉

- J は I の開集合 (∵ 解の局所一意性より)

J は open & closed ⇝ I の連結性から $I = J$ //
$J \neq \phi$

例 $\mathbb{R}$ 上のベクトル場 $1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ の積分曲線 $\frac{dx}{dt} = \underline{1}$

$$\rightsquigarrow \quad x(t) = \underline{x(0)} + t$$

$x\frac{\partial}{\partial x}$ の積分曲線　　$\frac{dx}{dt} = x$

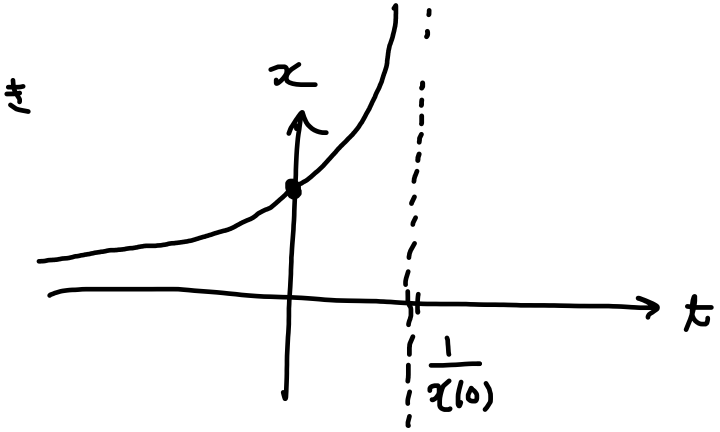
$$\rightsquigarrow \quad x(t) = x(0)e^{t}$$

$x^2\frac{\partial}{\partial x}$ の積分曲線　　$\frac{dx}{dt} = x^2$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \qquad -\frac{1}{x} = t + C$$

$$C = -\frac{1}{x(0)} \text{ て } \qquad x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

$x(0) \neq 0$ のとき

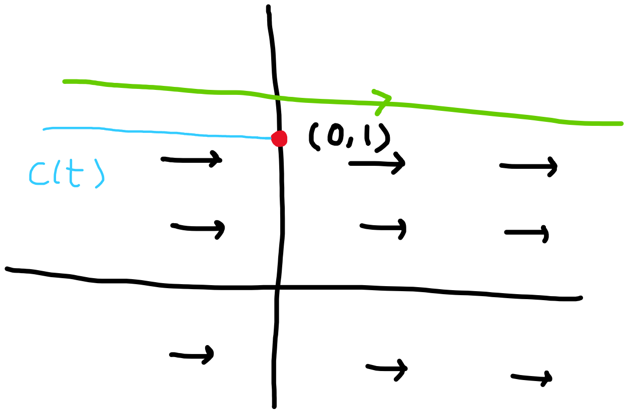


$t = \frac{1}{x(0)}$ て 解は 発散

$\rightsquigarrow$ 解は $\mathbb{R}$ 全体で定まるとは限らない

例　(x, y)

ℝ 上の ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x}$ ⇝ $c(t) = (x+t, y)$



$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ 上では

積分曲線が ℝ全体で定まらないことがある

$c(t) = (-1+t, 1)$ $t < 1$ のみで定まる

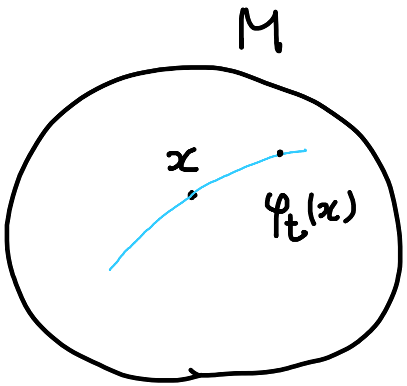
定義 M上のベクトル場 X が完備 (complete) とは

$^\forall p \in M$ に対して p を初期値とする積分曲線

$$^\exists c : \mathbb{R} \longrightarrow M \quad c(0) = p, \quad \frac{dc}{dt} = X_{c(t)}$$

が存在する.

X : 完備 C^∞ベクトル場 ⇝ X の flow φ_t $M \to M$ $(t \in \mathbb{R})$



$$\begin{cases} \bullet\ \text{各 } x \in M \text{ に対して } \quad t \longmapsto \varphi_t(x) \text{ は} \\ \quad X \text{ の積分曲線} \\ \bullet\ \varphi_0(x) = x \end{cases}$$

命題 X : C^∞級ベクトル場 on M

$^\forall p \in M$ に対して p の open nbd $^\exists V$ と $^\exists \varepsilon > 0$ が存在して次が成立

① $x \in V$ に対して x を初期値とする積分曲線

$$\begin{array}{cccc} c(x, \cdot) : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & M \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & c(x, t) \end{array}$$

$$\frac{dc(x,t)}{dt} = X_{c(x,t)}, \qquad c(x, 0) = x$$ が存在する.

② $c : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ は C^∞ 級

$(x, t) \longmapsto c(x, t)$

∵ 常微分方程式の解が初期値に C^∞ 級に依存することから.

定理 X : C^∞ ベクトル場

$\mathrm{Supp}\, X = \overline{\{ x \in M \mid X_x \neq 0 \}}$ がコンパクトと仮定

X の support (台)

$\Longrightarrow$ X は完備

∵

- $x \in \mathrm{Supp}\, X$ に対して上の命題にあるような x の開近傍 V_x と $\varepsilon(x) > 0$ をとる

- $\mathrm{Supp}\,X$ は コンパクトなので 有限コの V_x で おおわれる

$$\mathrm{Supp}\,X \subset V_1 \cup \cdots \cup V_N \qquad \begin{cases} V_i = V_{x_i} \\ \varepsilon_i = \varepsilon(x_i) \end{cases}$$

各 $x \in V_i$ に対して x を初期値とする

積分曲線が $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ 上 存在する

- $p \in M \setminus \mathrm{Supp}\,X$ に対しては p を初期値とする積分曲線は

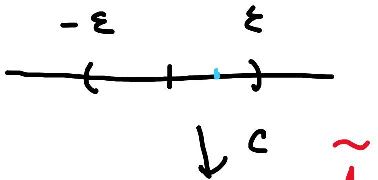
$$c(t) \equiv p \qquad (\text{定値写像})$$

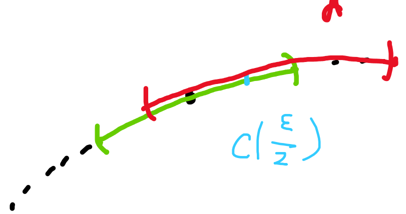
より $\mathbb{R}$ 上で 定まる.

- $\forall x \in M$ に対して x を初期値とする積分曲線が $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上

存在する 但し $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N)$

- $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \qquad c(0) = x \qquad$ 積分曲線





$c(\frac{\varepsilon}{2})$ を初期値とする積分曲線 $\exists\, d(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$$d(0) = c(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$\tilde{d}(t) = d(t - \frac{\varepsilon}{2})$ とおくと $\tilde{d} : (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}\varepsilon) \to M$

も積分曲線で

$$\tilde{d}(\tfrac{\varepsilon}{2}) = c(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$\rightsquigarrow \tilde{d}(t) = c(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}\varepsilon)$

$\rightsquigarrow$ c は $(-\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon)$ に拡張された

$\rightsquigarrow$ くり返して $(-\infty, \infty) \to M$ に拡張できる.

完備ベクトル場の flow

X: 完備 C^∞級ベクトル場

$\varphi_t : M \longrightarrow M$ flow とは

各 $x \in M$ に対して $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varphi_t(x) \in M$

が x を初期値とする X の積分曲線であること

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = x \\ \dfrac{d\varphi_t}{dt}(x) = X_{\varphi_t(x)} \end{cases}$$

φ_t は写像 $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ を定める.

$$(x, t) \longmapsto \varphi_t(x)$$

定理 Φ は C^∞級 map で

$$\begin{cases} ① \ \varphi_0 = \mathrm{id}_M \\ ② \ \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t} \end{cases}$$

$\{ \varphi : M \to M \}$

㊟ $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{id}_M$

より φ_t は diffeo.

diffeo
||
$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$

なる群準同型

と思える

(∵) ・Φ は C^∞級 (演習)

・$\varphi_0 = \mathrm{id}$ は明らか. ・$x \in M$とし、 $y = \varphi_s(x)$ とおく

yを初期値とする積分曲線は

$c(t) = \varphi_{t+s}(x)$ で与えられる

(∵)

$c(0) = \varphi_s(x) = y$

$\frac{dc}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\varphi_{s+t}(x)$

$= X_{\varphi_{s+t}(x)} = X_{c(t)}$

一方 $c(t) = \varphi_t(y)$ でもある

$$\therefore\ \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(y) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$

$$\therefore\ \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad //$$

$\varphi_0 = id,\ \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

定義 上の①, ② をみたす C^∞ map $\Phi\ M \times \mathbb{R} \to M$

$(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$

を 1-parameter 変換群 (1 parameter transformation group)

という.

定理 M上の完備な $\underbrace{\text{ベクトル場}}_{C^\infty\text{級}}$ $\underset{1:1}{\longleftrightarrow}$ 1 parameter 変換群

$\Phi\ M \times \mathbb{R} \to M$

∵ (⇒) は flow をとればよい

$(\Leftarrow)$ $\quad \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ $\quad$ 1 パラメータ変換群

に対して $\quad X_x := \left.\dfrac{d}{dt} \varphi_t(x)\right|_{t=0}$ とおく. $\quad \in T_x M$

これは C^∞級ベクトル場 （座標表示すると分かる）

このとき $\varphi_t(x)$ が X の flow であることを示す.

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \left.\frac{d}{ds} \varphi_{t+s}(x)\right|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds} \varphi_s(\underline{\varphi_t(x)})$$

$$= X_{\varphi_t(x)} \qquad (X \text{ の def より})$$

$\rightsquigarrow$ $\varphi_t(x)$ は X の積分曲線

(例) Lie群上のベクトル場

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = E_n \} \underset{\text{submfd}}{\subset} \underset{\text{ベクトル空間}}{\underline{M_n(\mathbb{R})}}$$

$$T_A O(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX A + {}^tA X = 0 \}$$

$$o(n) = T_{E_n} O(n) = \{ {}^tX + X = 0 \} \quad \text{Lie環}$$

$X \in o(n)$ に対して $O(n)$ 上のベクトル場 $\underline{X}$ を次で定める

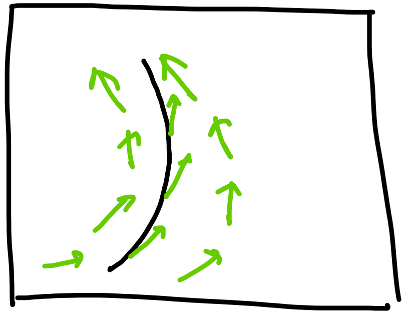
(ここだけの記号)

$$\underline{X}_A := \underset{\text{行列の積}}{\underline{XA}} \qquad A \in O(n)$$

($\underline{XA \in T_A O(n)}$ であることは簡単にcheckできる)

- このベクトル場は $M_n(\mathbb{R})$ 上のベクトル場で $O(n)$ に接しているものとみなせる.

($O(n)$ 上のベクトル場としては C^∞ 級)



- $\underline{X}$ の flow を計算したい

$$\frac{dA(t)}{dt} = X\,A(t)$$

$A(t)$: 行列値関数

$$\rightsquigarrow \quad A(t) = \underbrace{\exp(tX)}_{\text{行列の exponential}} A(0)$$

㊟

この flow は $O(n)$ を

保っていることが check できる

$$\exp(tX) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)}{k!}$$

$$= E_n + tX + \frac{t^2}{2} X^2$$

$$+ \cdots$$

Lie微分

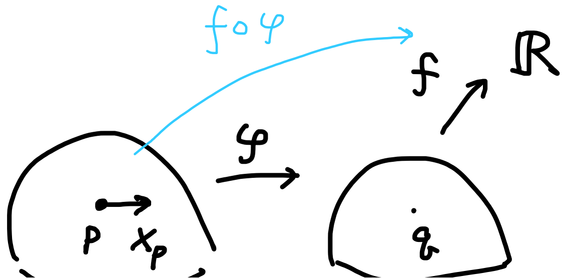
- $\varphi : M \to N$　微分同相 (diffeo)

- M上のベクトル場 $X \in \underbrace{\mathfrak{X}(M)}_{\text{C}^\infty\text{級ベクトル場の集合}}$ に対して N上のベクトル場 $\underbrace{\varphi_* X}_{\text{押し出し (push-forward)}} \in \mathfrak{X}(N)$ を次のように対応させる

$$(\varphi_* X)_q := \underbrace{d_p\varphi}_{T_pM \to T_qN}\Big(\underset{\overset{\cap}{T_pM}}{X_p}\Big) \in T_qN \qquad 但し \begin{cases} q \in N \\ p = \varphi^{-1}(q) \in M \end{cases}$$

[これが C^∞級ベクトル場になることは演習]

- $\varphi_* X$ の関数 $f \in C^\infty(N)$ への作用



$$(\varphi_* X)\ (f) = \big(d_p\varphi(X_p)\big)(f)$$

$$= X_p(f\circ\varphi)$$

$$= (X(f\circ\varphi))(p) = (X(f\circ\varphi))(\varphi^{-1}(q))$$

つまり $$\underline{(\varphi_*X)(f) = (X(f\circ\varphi))\circ\varphi^{-1}}$$

- 関数の引き戻し $\varphi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$

$$f \longmapsto \underline{f\circ\varphi = \overset{\bigcirc}{\varphi^*} f} \text{ とかく}$$

↑
これは φ が diffeo でなくても
一般の C^∞ map $M\to N$ で OK.

上の関係は次の可換図式で書ける

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(N) \arrow[r, "\varphi^*", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi_*X"'] & C^\infty(M) \arrow[d, "X"] \\
C^\infty(N) \arrow[r, "\varphi^*", "\cong"'] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_*X = (\varphi^*)^{-1}\circ X\circ\varphi^*$$

㊟ 下つきの $*$: もとの写像と同じ向きの操作（押し出し）push-forward

上つきの $*$: 〃 と 逆向きの操作（引き戻し）pull-back

㊟ φ が一般の C^∞ map $\varphi : M \to N$ のとき

M 上のベクトル場 X は必ずしも φ で"押し出せない"

一方で $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が「φ で関係する」

ことはありうる

$$\boxed{\forall p \in M \text{ に対して } \quad d_p\varphi(X_p) = Y_{\varphi(p)}}$$

定義（Lie微分） $X \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad \varphi_t$: X の flow （局所的）

$t=0$ の近傍で定義されている

① $f \in C^\infty(M)$ に対して

・$\varphi_0(x) = x$

・$t \mapsto \varphi_t(x)$ は x を通る X の

積分曲線

$$\mathcal{L}_X f := \frac{d}{dt} \underline{\varphi_t^* f} \Big|_{t=0}$$

φ_t は diffeo

$\varphi_t : M \to M$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}$$

パラメータ

t に 滑らかに依存する

② $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \overbrace{(\varphi_{-t})_* Y}^{M\text{上のベクトル場}} \Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

$\mathcal{L}_X f$, $\mathcal{L}_X Y$ を Lie微分 という.（もっと一般のテンソル場で定義される）

<u>定理</u>

① $\mathcal{L}_X f = X(f)$

② $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

∵

①

$$\underline{(\mathcal{L}_X f)}(p) = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* f)(p)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} f(\underbrace{\varphi_t(p)}_{})\Big|_{t=0}$$

t=0での
速度が X_p にひとしい 曲線

$$= X_p(f) = \underline{X(f)}(p)$$

②

$$(\mathcal{L}_X Y)(\underbrace{f}_{C^\infty(M)}) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{(\varphi_{-t})_*}_{} Y\right)(f)\Big|_{t=0}$$

$\downarrow$ 上の可換
図式

$$= \frac{d}{dt}\left(\underbrace{(\varphi_{-t}^*)^{-1}\, Y\, \varphi_{-t}^*}_{}(f)\right)\Big|$$

$t=0$

$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ ゆえ $(\varphi_{-t}^{*})^{-1} = \varphi_t^{*}$ であることが分かり

$$= \frac{d}{dt}\left(\underline{\varphi_{t}^{*}\, Y\, \varphi_{-t}^{*}(f)}\right)\Big|_{t=0}$$

$\left(\varphi_t^{*} Y \varphi_s^{*}(f)\right)(p)$

は $\underset{\mathbb{R}^2\times M}{\underset{\cap}{(t,s,p)}}$ の C^∞ 級関数

$$= \frac{d}{dt}\varphi_t^{*} Y(f)\Big|_{t=0} - \frac{d}{dt}\underset{\sim}{Y}\,\varphi_t^{*} f\Big|_{t=0}$$

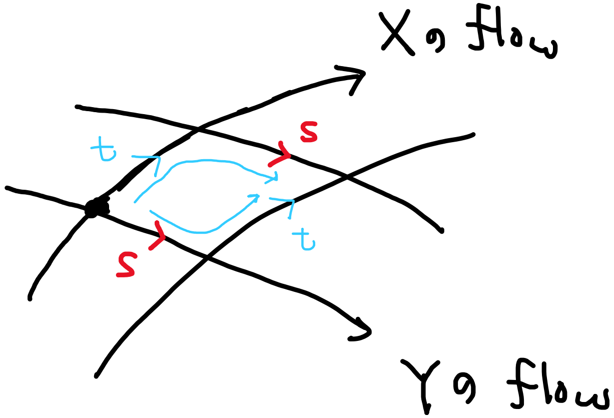
$$= X(Y(f)) - Y(X(f))$$

①より $= [X, Y](f)$ //

応用 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ・完備

$[X, Y] = 0$ ならば X の flow $\{\varphi_t\}$ と Y の flow $\{\psi_t\}$

は 互いに 交換する $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ $(\forall s, \forall t)$



∵ $\psi_s = \varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t$ を示せばよい

つまり $s \longmapsto (\varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t)(x)$

が xを初期値とする Yの積分曲線 であることを示す

- $s=0$のとき $(\varphi_t^{-1} \circ \underset{\underset{\text{id}}{\parallel}}{\underline{\psi_0}} \circ \varphi_t)(x) = (\varphi_t^{-1} \circ \varphi_t)(x) = x$

[$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ に注意]

- $\frac{d}{ds} \underline{\varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t (x)} = \frac{d}{ds} \varphi_{-t}(\underline{\psi_s(\varphi_t(x))})$

パラメータ s について Yの積分曲線

で 速度 は $Y_{\psi_s(\varphi_t(x))}$

$$= d_{\psi_s(\varphi_t(x))}\varphi_{-t}\left(Y_{\psi_s(\varphi_t(x))}\right)$$

$$= \left[\underbrace{(\varphi_{-t})_* Y}_{\overset{?}{\|}}\right]_{\varphi_{-t}(\psi_s(\varphi_t(x)))}$$

Y であればよい

・一方で

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_* Y = \frac{d}{ds}(\varphi_{-t-s})_* Y\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}(\varphi_{-t})_*(\varphi_{-s})_* Y\Big|_{s=0}$$

$$= (\varphi_{-t})_* \mathcal{L}_X Y$$

- $\varphi_{-t-s} = \varphi_{-t}\circ\varphi_{-s}$
- $(\varphi_1\circ\varphi_2)_* = \varphi_{1*}\circ\varphi_{2*}$

φ_i diffeo

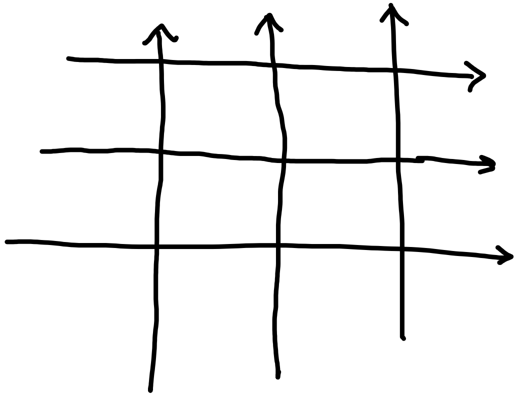
$$= (\varphi_{-t})_* [X, Y] = 0$$

より $(\varphi_{-t})_* Y = (\varphi_0)_* Y = Y$ //

㊟ 逆も正しい (flow が交換 $\Rightarrow$ $[X, Y] = 0$ もいえる)

(例) $\underset{\substack{\cup \\ (x,y)}}{\mathbb{R}^2}$ 上のベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ $\rightsquigarrow$ $[X, Y] = 0$

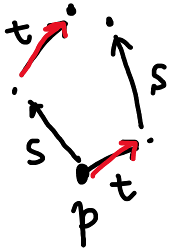
$$\begin{cases} X \text{ の flow} & \varphi_t(x, y) = (x+t, y) \\ Y \text{ の flow} & \psi_t(x, y) = (x, y+t) \end{cases}$$



㊟ $[X, Y] \neq 0$ のとき s, t が微小のとき

$$\psi_s \circ \varphi_t - \varphi_t \circ \psi_s \sim st [X, Y]$$

$\varphi_s \circ \psi_t - \psi_t \circ \varphi_s \sim st\,[X, Y]$



（座標表示したときにこの近似式が成立する）

[X, Y] は flow が交換しない度合いを与える

余接空間　(cotangent space)

T_pM : 接空間 $(p \in M)$ ← $\mathbb{R}$ベクトル空間

T_p^*M = T_pM の双対空間

$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{R})$

$= \{ \alpha : T_pM \to \mathbb{R} \mid \alpha$ は $\mathbb{R}$ 線形 $\}$

余接空間

を 余接空間 という

T_p^*M の 元 を 余接ベクトル という (cotangent vector)

例

f 点 p のまわりの C^∞ 級関数

$$d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$ は 余接ベクトル

$= (df)_p$ ともかく

$X \in T_pM$ に対して $\boxed{d_pf(X) = X(f)}$

∵ x $\mathbb{R}$の座標

$$(d_pf(X))(x) = X(x \circ f) = X(f)$$

より $d_pf(X) = \underline{X(f)}\frac{\partial}{\partial x}$

$(x_1,\dots,x_m)$: Mの局所座標

命題

$$(dx_1)_p = d_p x_1, \dots, (dx_m)_p = d_p x_m \in T_p^* M$$

は $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \in T_pM$ の双対基底である.

∵ $$(dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p x_i = \delta_{ij}$$

//

1次微分形式 (differential 1-form) 単に 1-form ともいう

M上の 1-form とは Mの各点 p に対して 余接ベクトル $\alpha_p \in T_p^* M$

が与えられたもの

- 局所座標表示　$(U; x_1, \cdots, x_m)$ 上で

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f_i(x_1(p), \cdots, x_m(p))}_{m\text{変数関数}} (dx_i)_p$$

- α が C^∞級 1-form $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 f_i が C^∞級関数

座標のとり方によらないこと

$(y_1, \cdots, y_m)$: 別の座標系

命題

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\,(dy_j)_p$$

(∵) $(dy_1)_p, \cdots, (dy_m)_p$ は T_p^*M の基底なので

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (dy_j)_p$$ と展開できる

$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ での値をみると

$$\underset{\displaystyle \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)}{\underset{\parallel}{(dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p\right)}} = a_{ij}$$

- 命題より

$$\alpha = \sum_i f_i(x)\, dx_i \quad \leftarrow x\text{座標表示}$$

$$= \sum_{i,j} f_i(x) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}}_{C^\infty\text{級}} dy_j \quad \leftarrow y \quad 〃 \quad 〃$$

つまり係数関数のなめらかさは座標のとり方によらない

例 $f \in C^\infty(M)$ $\quad df :=$ 各点 p に対して 余接ベクトル $\underset{(df)_p}{\underset{\shortparallel}{d_pf}}$ を対応させる 1-form

df は C^∞級 1-form

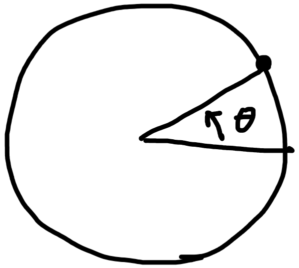
∵ $(x_1 \cdots x_m)$ 座標 $\quad d_pf\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$

$$\rightsquigarrow \quad d_pf = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}_{C^\infty\text{級}} (dx_j)_p$$

（上の座標変換公式の一般化）

注 $(U : x_1 \cdots x_m)$ 座標系. $\quad dx_i$ は U 上の C^∞級 1-form

㊄例 $M = S^1$ 上の角度座標 θ



- $d\theta$ は S^1 上の大域的な C^∞級 1-form

$$d(\theta + 2\pi) = d\theta$$

- $d\theta = df$ を満たす C^∞級関数 $\underset{C^\infty(S^1)}{\underset{\cap}{f}}$ は存在しないことを示せ

11回目

2020年7月8日　10:18

微分形式・引き戻し・外積・外微分

復習

- 1-form α

  $p \in M$ に対して 余接ベクトル $\alpha_p \in T_p^*M$ が定まる

- 局所座標表示

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, \cdots, x_m)(dx_i)_p$$

$$\{(dx_i)_p\} \underset{双対}{\longleftrightarrow} \{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\}$$

T_p^*Mの basis　　T_pMの basis

- f 点pのまわりの C^∞級

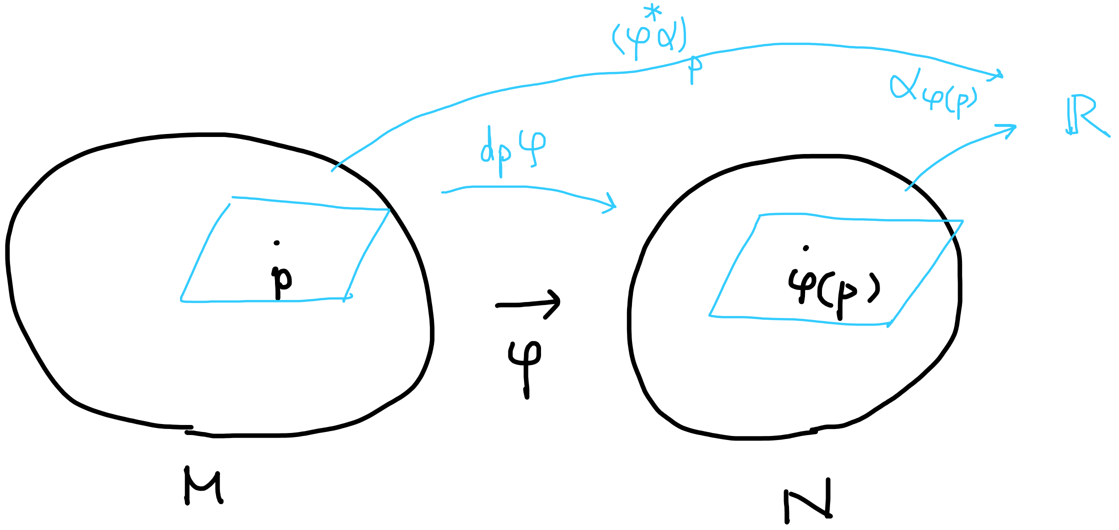
$$(df)_p(\underset{\substack{\uparrow \\ T_pM}}{\underline{X}}) := \underline{X}(f)$$

引き戻し

$\varphi : M \longrightarrow N$　C^∞ map

N上の 1-form α に対して M上の 1-form $\varphi^*\alpha$ を次で定義

$$(\varphi^*\alpha)_p := \alpha_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi \qquad (\forall p \in M)$$



- $\varphi^*\alpha$ を α の φ による引き戻し (pull-back) という

<u>局所座標表示.</u>

$(x_1, \cdots, x_m)$ p のまわりの座標.

$(y_1, \cdots, y_n)$ $\varphi(p)$ の座標.

$y_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_m)$: φ の座標表示.

$$\underline{\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y_1, \cdots, y_n)\, dy_i} \quad : \quad \alpha \text{ の } 〃$$

$$(\varphi^*\alpha)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \alpha_{\varphi(p)}\left(d_p\varphi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)\right)$$

$$= \underline{\alpha_{\varphi(p)}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x(p))\,\underline{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x(p))\,\underbrace{\alpha_j(\varphi_1(x(p)),\cdots,\varphi_n(x(p)))}_{\shortparallel}$$

$$\varphi^*\alpha_j := \alpha_j\circ\varphi$$

よって $\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^{m}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\underline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)}\,\boxed{\underline{(\varphi^*\alpha_j)(x)}}}\,dx_i$ （関数の引き戻し）

よって α C^∞ 1-form $\Rightarrow$ $\varphi^*\alpha$ も C^∞ 1-form

命題 $f: M\to N$, $g: N\to Q$ C^∞ maps

Q上の 1-form α に対して $(g\circ f)\,\alpha = f\,(g\,\alpha)$

(∵)

写像に対する chain rule $d_p(g\circ f) = d_{f(p)}g\circ d_pf$

から すぐ 分かる （演習）

命題 $\varphi : M \to N$: C^∞ map , α N上の $\overbrace{\text{1-form}}^{C^\infty\text{級}}$

f : N上の C^∞級関数

① $\varphi^*(f\cdot\alpha) = \varphi^*f\cdot\varphi^*\alpha$

関数と 1 form の積

$(f\alpha)_p := f(p)\,\alpha_p$

は 1-form

② $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$

$\varphi^*f := f\circ\varphi$

(∵)

① $(\varphi^*(f\alpha))_p = (f\alpha)_{\varphi(p)}\circ d_p\varphi$

$$= f(\varphi(p)) \cdot (\alpha_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi)$$

$$= f(\varphi(p)) \cdot (\varphi^*\alpha)_p = (\varphi^*f \cdot \varphi^*\alpha)_p$$

② $(\varphi^*(df))_p = d_{\varphi(p)}f \circ d_p\varphi$ （定義より）

$= d_p(f \circ \varphi)$ (chain rul)

$= d_p(\varphi^*f) = (d(\varphi^*f))_p$ //

<u>外積代数</u> （グラスマン代数）

exterior algebra / Grassmann algebra

V : 有限次元ベクトル空間 / $\mathbb{R}$

$$\Lambda^{\bullet} V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

外積代数

$\left(\Lambda^0 V := \mathbb{R}\right.$ とおく $\left.\right)$

V の basis $e_1, \cdots, e_n$ を fix する

$$\Lambda^k V := \bigoplus_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{R}\ \boxed{e_{i_1} \overset{\text{wedge}}{\wedge} e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}}$$

記号

こういう記号を

基底とするベクトル空間

↑

$i_1, i_2, \cdots, i_k$ は 単調増大な添え字の列 全てをわたる

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

一般に $v_1, \cdots, v_k \in V$ に対して $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k V$

が 次の ルール で 定まる

① (多重線形性) $v_i = a\vec{x} + b \cdot \vec{y}$ $\quad \vec{x}, \vec{y} \in V$

aとき　　　　　　$a, b \in \mathbb{R}$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k = a \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \wedge \cdots \wedge v_k) + b\,(v_1 \wedge \cdots \wedge \vec{y} \wedge \cdots \wedge v_k)$$

② (反対称性)

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \quad \wedge v_k = - v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

例

$e_1 \wedge e_1 = - e_1 \wedge e_1$ より $e_1 \wedge e_1 = 0$

$$e_1 \wedge \underline{(e_1 + e_2)} \wedge (e_1 + e_2 + e_3) = \underline{e_1} \wedge \underline{e_2} \wedge (\underline{e_1} + \underline{e_2} + e_3)$$

$$= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$\underleftrightarrow{e_2 \wedge e_1} \wedge e_3 = - e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

wedge 積 (外積)　　$\wedge$　　$k+l$

$$\Lambda^{k} V \times \Lambda^{l} V \longrightarrow \Lambda V$$

$\mathbb{R}$ 上双線形な積で

$$\big(\underbrace{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k}_{\Lambda^k V}\big) \wedge \big(\underbrace{w_1 \wedge \cdots \wedge w_l}_{\Lambda^l V}\big) = \underbrace{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l}_{\Lambda^{k+l} V}$$

を満たすものが唯1つ存在する.　（基底で定義して双線形に拡張）

㊃ 例 $\Lambda^{k} V$ の元が常に $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ の形に書けるわけではない

$$\Lambda^{2} \mathbb{R}^4 \ni e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 =: x$$

2次の元

$x = v \wedge w$ の形には書けない

もし書けたとき　$x \wedge x = (\underline{v} \wedge w) \wedge (\underline{v} \wedge w) = 0$

だが $x \wedge x = 2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ と矛盾.

命題 $\alpha \in \Lambda^k V$, $\beta \in \Lambda^l V$, $\gamma \in \Lambda^m V$ に対して

$$\begin{cases} ① \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \\ ② \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l}\, \beta \wedge \alpha \end{cases}$$

: 超可換

次数付き可換

super commutative

graded 〃

㊟ $\dim \Lambda^{\bullet} V = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

$= 2^n$

→ 単に k-form とも

定義 k次微分形式 (differential k-form) とは M の各点 p

て $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ が与えられたもの

局所座標表示 $(x_1, \dots, x_m)$ 座標

$$\omega_p = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \underbrace{\omega_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x_1(p),\dots,x_m(p))}_{\text{関数}} (dx_{i_1})_p \wedge\cdots\wedge (dx_{i_k})_p$$

- 各係数 $\omega_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_m)$ が C^∞級のとき ω を

  <u>C^∞級 k-form</u> という

- 座標変換 $dx_i = \displaystyle\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$

$$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = \sum \frac{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}{} dy_{j_1}\wedge\cdots\wedge dy_{j_k}$$

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k} \quad \underbrace{\partial(y_{j_1}, \cdots, y_{j_k})}_{C^\infty級}$$

⇝ C^∞級の定義は座標によらない

外積

α: k-form, β: l-form

$$(\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p$$

により $(k+l)$-form $\alpha \wedge \beta$ が定まる.

[α, β: C^∞級 $\Longrightarrow$ $\alpha \wedge \beta$ C^∞級]

引き戻し

$\varphi: M \longrightarrow N$ C^∞ map

$p \in M$ $\quad d_p\varphi: T_pM \to T_{\varphi(p)}N$

の双対より
$$\begin{array}{cccc} (d_p\varphi)^* : & T^*_{\varphi(p)}N & \longrightarrow & T_p^*M \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha\circ d_p\varphi \end{array}$$

⇝ k次外積の間の線形写像

$$(d_p\varphi)^* : \Lambda^k T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow \Lambda^k T_p^*M$$

㊟ 一般に線形写像 $f : V \to W$ に対して 線形写像

$$f : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^k W$$

であって

$$\underline{v_1\wedge\cdots\wedge v_k \longmapsto f(v_1)\wedge \wedge f(v_k)}$$

なるものが $\exists !$ 存在する

α : N上の k-form に対して M上の k-form $\varphi^*\alpha$ を

$$(\varphi^*\alpha)_p := (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)})$$

と定める.

α C^∞級 $\Rightarrow$ $\varphi^*\alpha$ も C^∞級

命題 α, β $\underbrace{\text{微分形式}}_{N上の}$ $\varphi : M \to N$ C^∞ map

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$$

∵ $p \in M$ に対して

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(\alpha\wedge\beta))_p &= (d_p\varphi)^*(\alpha \wedge \beta)_{\varphi(p)} \\
&= (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)} \wedge \beta_{\varphi(p)}) \\
&= (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)}) \wedge (d_p\varphi)^*(\beta_{\varphi(p)}) \\
&= (\varphi^*\alpha)_p \wedge (\varphi^*\beta)_p \\
&= (\varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta)_p
\end{aligned}$$

反変外積に
誘導する
写像のdef →

//

㊟ $\bigwedge^0 T_p^* M = \mathbb{R}$ たったので 0-form は単に $\mathbb{R}$値関数のこと

㊟ ・関数，微分形式は引き戻せる！ （ベクトル場は$\underbrace{\ }_{\text{一般には}}$引き戻せない）

外微分

M : C^∞ mfd

$$\Omega^k(M) = \{ M\text{上の } C^\infty\text{級 } k\text{-form} \}$$

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M)$$

$$\Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(M) \quad \text{外積}$$

$\mathbb{R}$上の線形写像 $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

て 次の性質を満たすもの が 唯1つ存在し, 外微分という.

① $k=0$ のとき $\Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, $f \mapsto df$

は 通常の微分 （座標でかくと $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m)\, dx_j$ ）

② $d \circ d = 0$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M) \arrow[r, "d"'] \arrow[rr, bend right, "d \circ d = 0"'] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+2}(M)
\end{tikzcd}$$

$$d(d\omega) = 0$$

③ (Leibniz rule) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

④ (引き戻しとの可換性) $\varphi \;\; M \to N$ C^∞ map

$\alpha \in \Omega^k(N)$ $d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha)$

$\alpha \in \Omega(N)$ に対して $d(\varphi\alpha) = \varphi(d\alpha)$

」

定理 ①～④を満たす写像 d が唯1つ存在する.

$\because$ M が $\mathbb{R}^m$ の open set と微分同相であるとき

$(x_1, \cdots, x_m)$ を M 上の座標とする

$$k\text{-form} \quad \alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \underbrace{\alpha_{i_1, \cdots, i_k}(x)}_{0\text{-form}} \underbrace{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}}_{k\text{-form}}$$

$d\alpha$ を上の ①～③ のみを用いて計算

$$\underset{\substack{\text{線形性}\\\text{と}\\\text{Leibniz ③}}}{d\alpha =} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left(d\, \underbrace{\alpha_{i_1 \cdots i_k}(x)}_{0\text{-form}} \right) \wedge \left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)$$

$$+ \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k}(x) \wedge \underbrace{\boxed{d} \left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)}_{\uparrow}$$

ここで さらに Leibniz を使う

$$d(dx_j) = 0 \quad [② より]$$

より ここは 消える

$$\underset{①より}{=} \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j} \overbrace{\frac{\partial \alpha_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}(x)\, dx_j}^{d\alpha_{i_1\cdots i_k}} \wedge dx_{i_1} \wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \qquad (*)$$

逆に (*) で dα を定義することにする　このとき ①〜③ を check する

- ① は 自明に成立
- ② $$d(d\alpha) = \sum_{i_1,\cdots,i_k,\,j,\,l} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_l\, \partial x_j}}_{\text{j と l について対称}}(x)\; \underbrace{dx_l \wedge dx_j}_{\text{j と l について反対称}} \wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$= 0$$

$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$　$J = \{j_1, \cdots, j_l\}$

③ $\alpha = f(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdot \wedge dx_{i_k} = f\, dx_I$

$\beta = g(x)\, dx_{j_1} \wedge - \wedge dx_{j_l} = g\, dx_J$

に対して check すれば

十分

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\left(f \cdot \overset{dx_{i_1}\wedge - \wedge dx_{i_k}}{\boxed{dx_I}} \wedge g \cdot dx_J \right)$$

$$= \sum_i \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \boxed{dx_i} \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) \wedge g\, dx_J$$

$$+ \sum_i f\, dx_I \wedge g\, dx_i \wedge dx_J \quad (-1)^k$$

$$= (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^{k}\,\alpha\wedge d\beta \quad //$$

dは座標のとり方によらない条件①〜③で特徴付けられている

⤳ (*)はどの座標系でも成立する式

㊟ $U \underset{\text{open}}{\subset} M$ に対して，(*)の定義から

$$d\alpha\big|_U = d\left(\alpha\big|_U\right)$$ が成立する

一般の多様体 M 上での d

$$M = \bigcup_i U_i \qquad U_i :\ \text{座標近傍}$$

$$\alpha \in \Omega^k(M) \qquad \varphi_i : U_i \hookrightarrow M \quad \text{包含写像}$$

[①〜④を仮定に $d\alpha$ を計算]

$$\beta_i := d\alpha\Big|_{U_i} = \varphi_i^*(d\alpha)$$

$$\underset{④より}{=} d(\varphi_i^*\alpha) = d\left(\alpha\big|_{U_i}\right)$$

は既に知っている

β_i が M 全体での $(k+1)$-form に「はり合う」ことを見る.

$$\beta_i\Big|_{U_i\cap U_j} = d\left(\alpha\big|_{U_i}\right)\Big|_{U_i\cap U_j}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 上の㊟}}{=} d\left(\alpha\big|_{U_i\cap U_j}\right) = d\left(\alpha\big|_{U_j}\right)\Big|_{U_i\cap U_j}$$

$$= \beta_j\Big|_{U_i\cap U_j}$$

//

④ が一般の $\varphi : M \to N$ に対して成立すること

$$\begin{cases} p \in M \text{ のまわりの局所座標 } (x_1, \cdots, x_m) \\ \varphi(p) \in N \quad 〃 \quad (y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1,\cdots,i_k}(y)\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$ N上の k-form

$$\varphi^*\alpha = \sum \varphi^*\alpha_{i_1\cdots i_k} \cdot \varphi^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_{i_k})$$

↓ $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$ は最初の方で示した

$$= \sum \underbrace{\varphi^*\alpha_{i_1\cdots i_k}}_{} \cdot \underbrace{d(\varphi^*y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^*y_{i_k})}_{}$$

$$d(\varphi^*\alpha) \underset{\textcircled{3}\text{と}\textcircled{2}}{=} \sum \underline{d(\varphi^*\alpha_{i_1\cdots i_k})} \wedge d(\varphi^*y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^*y_{i_k})$$

↓ 前に示した ↓ ↓

$$= \sum \underline{\varphi^*(d\alpha_{i_1\cdots i_k})} \wedge \varphi^*(dy_{i_1}) \wedge \quad \wedge \varphi^*(dy_{i_k})$$

$$= \varphi^* \left(\sum d\alpha_{i_1 \cdots i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \right)$$

$$= \varphi^* (d\alpha) \qquad //$$

12回目

2020年7月15日 10:18

微分形式と反対称形式

ベクトル場 : 各点 $p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$

微分形式 : $p \in M$: $\omega_p \in \Lambda^k T_p^*M$

多重ベクトル場 $p \in M$: $v_p \in \Lambda^k T_pM$

テンソル場 $T_p \in (T_pM)^{\otimes n} \otimes (T_p^*M)^{\otimes m}$

実は ω_p は 反対称形式 (交代形式)

$$\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{コ}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と思える

[松本] での def

$$(v_1, \cdots, v_k) \longmapsto \omega_p(v_1, \cdots, v_k)$$

① 各 v_i について 線形 (多重線形性)

② 反対称 $\omega_p(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \omega_p(v_1, \cdots, v_k)$

$\forall \sigma \in S_k$: k次対称群

定理 V ℝ上の有限次元ベクトル空間

同型 $\exists ! \; \Phi : \Lambda^k V^* \xrightarrow[\cong]{} \left\{ f : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{コ}} \to \mathbb{R} \right.$ 反対称形式 $\left. \right\}$

s.t. $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ に対して

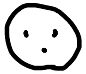
$$\underbrace{\Phi(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)}(v_1, \cdots, v_k) = \det\Big(\underbrace{(\varphi_i(v_j))_{ij}}_{k\text{次正方行列}} \Big)$$

↑

$v_1, \cdots, v_k$ について

多重線形・反対称

- $k=1$ のときは明らか. $\Lambda^1 V^* = V^*$



Universal mapping property ([illegible])

これが

・ universal mapping property （演習 No 11, 問題 125）

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{k個} \arrow[r] & \{V^k 上の反対称形式\} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j} \right) \\
\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] & \\
\Lambda^k V^* \arrow[uuur, dotted, "\exists!\ \Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

多重線形かつ反対称をcheck

・ 同型になること（演習）・

$e_1, \ldots, e_n$ ・ Vの基底

$e_1^*, \ldots, e_n^*$ V^*の双対基底

$\Phi(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)$ が 反対称形式の空間の基底になることを check.

㊟ 文献によっては $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \longmapsto \frac{1}{k!} \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j} \right)$

によって同型を与えるものもある

引き戻し，外積，外微分 （再論）

以下では $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^*M$ を T_pM 上の k次反対称形式 と（Φにより）同一視することにする．

例 ・ ω: 2-form　X, Y: vector場

$$\omega_p(X_p, Y_p) \quad (= \Phi(\omega_p)(X_p, Y_p))$$

$\omega(X, Y)$ は関数になる

・ α, β　1-form,　X, Y　vector場

$$(\alpha_p \wedge \beta_p)(X_p, Y_p) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

定理　$\varphi: M \to N$　C^∞ map　ω　N 上の k-form

$$\underset{\sim\sim\sim}{(\varphi^*\omega)}_p (v_1, \dots, v_k) = \omega_{\varphi(p)} \Big(\underbrace{d_p\varphi(v_1)}_{\in T_{\varphi(p)}N}, \dots, \underbrace{d_p\varphi(v_k)} \Big)$$

$$v_1, \dots, v_k \in T_pM$$

∵

$$d_p\varphi : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$$

$$\rightsquigarrow (d_p\varphi)^* \quad T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow T^*_pM$$

$$\rightsquigarrow (d_p\varphi)^* \quad \Lambda^k T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow \Lambda^k T^*_pM$$

$$\overset{\in}{\omega_{\varphi(p)}} \longmapsto \underline{\overset{\in}{(\varphi^*\omega)_p}}$$ と定義された

$\omega_{\varphi(p)} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ の形のときに示せば十分 $\left(\alpha_i \in T^*_{\varphi(p)}N \right)$

$$(\varphi^*\omega)_p = (d_p\varphi)^* (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)$$

$$= (d_p\varphi)^*\alpha_1 \wedge (d_p\varphi)^*\alpha_2 \wedge \cdot \quad \wedge (d_p\varphi)^*\alpha_k$$

$$(\varphi^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \det\Big(\big((d_p\varphi)^*\alpha_i\big)(v_j) \Big)$$

$$= \det\Big(\alpha_i\big(d_p\varphi(v_j)\big) \Big)$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)}_{\overset{\shortparallel}{\omega}} \big(d_p\varphi(v_1), \cdots, d_p\varphi(v_k)\big)$$

//

<u>定理</u> $\omega \in \Lambda^k T_p^* M$, $\eta \in \Lambda^l T_p^* M$, $v_1, \cdots, v_{k+l} \in T_pM$

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = \boxed{\frac{1}{k!\,l!}} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underline{\omega\big(v_{\underline{\sigma(1)}}, \cdots, v_{\underline{\sigma(k)}}\big)}$$

$$\times\, \underline{\eta\big(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}\big)}$$

(演習)

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \\ \eta &= \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l \end{aligned}$$ の場合に示せばよい $\begin{cases} \omega_i \in T_p^*M \\ \eta_j \in T_p^*M \end{cases}$

__定理__

M: C^∞ mfd

$\omega \in \Omega^k(M) = \{ C^\infty$級 k-form on $M \}$

$X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M) = \{ C^\infty$級ベクトル場 on $M \}$

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \left(\omega(X_1, \cdots, \underline{\check{X}_i}, \cdots, X_{k+1}) \right)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega \left([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{k+1} \right)$$

(check $\vee$ は除く意)

(演習)

$\mathfrak{X}(M)$

[cf. Lie環のコホモロジー

$\mathfrak{g}$: Lie環

$C^\infty(M) = V$: $\mathfrak{g}$の表現

$\rightsquigarrow$ $H^i(\mathfrak{g} ; V)$]

例

f 0-form (関数)

$$df(X) = X(f)$$

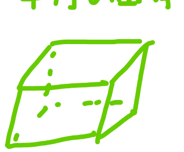
α 1-form

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

ω : 2-form

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = {} & X\omega(Y, Z) \overset{+Y\omega(Z, X)}{- Y\omega(X, Z)} + Z\omega(X, Y) \\ & - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) \\ & - \omega([Y, Z], X) \end{aligned}$$

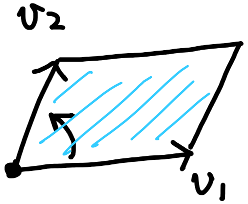
- 内部積
- Lie微分 (Cartanの公式) … 自習



微分形式の積分

$\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$ … 向き付けられた「微小平行(2k)面体」に対して実数を対応させる

$\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$



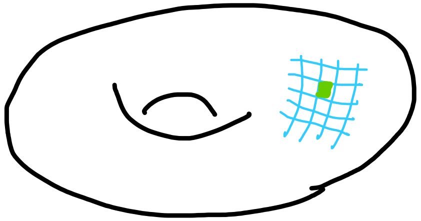
$\subset T_pM \longmapsto \omega(v_1, v_2)$

$\|$

$-\omega(v_2, v_1)$

- 向きの決まった k次元部分多様体 $S \subset M$ に対して

積分 $\int_S \omega$ を定義したい



- 積分の変数変換の公式

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1 dy_2$$

↑
絶対値
がついている
のが ちがう

$$dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\, dy_1 \wedge dy_2$$

微分形式の積分には「向き」（"座標の順序"）が必要

$$\underbrace{f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2} = \underbrace{- f(x_1, x_2)\, dx_2 \wedge dx_1}$$

順序をきめてはじめて積分ができる.

㊟ 微積で学ぶ積分は 微分形式ではなく 「density」の積分

$$f(x_1, x_2) \, |dx_1 \wedge dx_2|$$

微分形式 + 向き → density

向き V 実ベクトル空間 $n = \dim V$

Vの順序付けられた基底全体の集合に次の同値関係を入れる

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n) \iff w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ とおくとき}$$

$$\det((a_{ij})) > 0$$

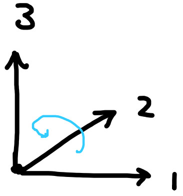
この同値類をVの**向き**という.

記号 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ で 基底$(v_1, \dots, v_n)$の定める向きを表す.

- Vの向きはちょうど2つある

$\mathbb{R}$ の向き $\begin{cases} \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle \end{cases}$

$\mathbb{R}^3$ の向き $\begin{cases} \langle e_1, e_2\ e_3 \rangle & \text{右手系} \\ \langle e_2, e_1, e_3 \rangle & \text{左手系} \end{cases}$



- 0次元ベクトル空間の向き ： $\overset{\langle \phi \rangle}{\overset{\shortparallel}{1}}$ 又は -1

上の定義では1つしか向きがない。（ϕ の与える向き）

が形式的にそれとは逆の向き（-1）をつけ加える

- V の向きを選ぶとき

その向きに属する基底を正の（向きをもつ）基底といい

その向きに属さない基底を負の（　〃　）基底という

向きは $\{ V\text{の順序付けられた基底} \} \longrightarrow \{\pm 1\}$ なる map と

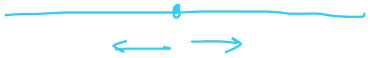
思える

選んだ向きを 正の向き

他方の向きを 負の向き，(−1)倍した向き などと言う.

㊟ V の向き $\underset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\bigwedge^n V$ の向き

1次元ベクトル空間



$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \longmapsto \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle$

㊟ V の向き $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ V^* の向き

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \longmapsto \langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle$

$\{v_i^*\}$ は $\{v_i\}$ の双対基底

$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

多様体の向き

M の向き とは 各点 $p \in M$ に対して T_pM の向きが定められたもので

次の条件を満たす。

$$\left\{\begin{array}{l} \forall p \in M \text{ に対して } p \text{ を含む座標近傍 } (U;\ x_1, \dots, x_m) \text{ が存在して} \\ \forall q \in U \text{ に対して } T_qM \text{ の向きは } \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_q \right\rangle \\ \text{で与えられる} \end{array}\right.$$

向きが点 p を動かすとき連続に変化する

- M に向きが与えられたとき、上の条件をみたす座標 $(x_1, \dots, x_m)$ を **正の座標系** という。

- $$\left.\begin{array}{l} (U;\ x_1, \dots, x_m) \\ (V;\ y_1, \dots, y_m) \end{array}\right\} \text{正の座標} \Rightarrow \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_q \right\rangle$$
$$= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_q \right\rangle$$
$$\forall q \in U \cap V$$

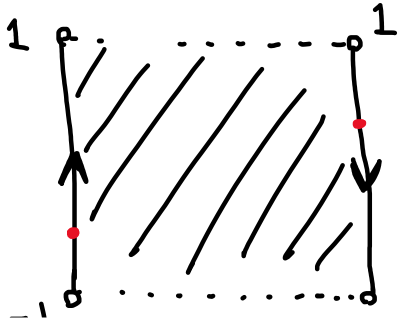
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(x_1, \cdots, x_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} > 0 \quad \text{on } U \cap V$$

- Mが向き付け可能 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ Mに向きが存在する

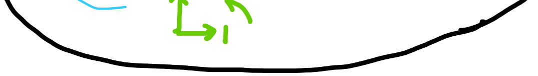
- Mが連結かつ向き付け可能 $\Rightarrow$ M上の向きはちょうど2つある（演習）

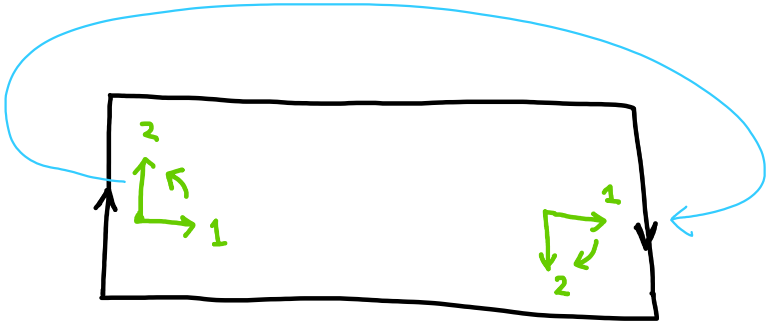
例　向き付け可能でない多様体

$$M = [0,1] \times (-1, 1) \Big/ {(0, x) \sim (1, -x)}$$



$-1 \qquad -1$

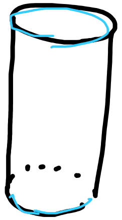




Möbius の帯

例
- S^n は 向き付け可能
- $\mathbb{C}P^n$ は 〃

- $\mathbb{R}P^2$ は 向き付け 不可能
- Kleinのつぼ



は向き付け 不可

積分

M: 向き付けられた m次元 C^∞ mfd, 第2可算公理をみたす.

$\omega \in \Omega^m(M)$

$\mathrm{Supp}\,\omega = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$. ωの台

Suppω がコンパクトと仮定　　$\int_M \omega$ を定義する.

① Suppω がある正の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ に含まれる場合

$$M \supset U \xrightarrow[(x_1,\cdots,x_m)]{\cong} U' \subset \mathbb{R}^m$$

$\omega = f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とおける

f はコンパクト台の C^∞級　　$f \in C_c^\infty(U')$

$$\int_M \omega := \int_{U'} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

積分の変数変換公式から，これは Suppω を含む正の座標系

のとり方によらない

② 一般の場合 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

$(U_\alpha ; x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$ 正の座標系

⇝ 1の分割 $\rho_\alpha : M \xrightarrow[C^\infty\text{級}]{} \mathbb{R}$

- $\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \subset U_\alpha$
- $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$
- $\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha$ は局所有限
- $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$

$$\int_M \omega := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{実は有限和}}}{\sum_\alpha} \underbrace{\int_M \boxed{\rho_\alpha \omega}}_{\text{①より定義されている}} \longleftarrow \text{台が } U_\alpha \text{ に含まれているので}$$

$\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\omega \neq \phi$ なる α は高々有限

∵ $\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha$ は $\underset{\uparrow\ \text{コンパクト}}{\underline{\mathrm{Supp}\,\omega}}$ の locally finite covering

（演習）

- $\{U_\alpha\}$, $\{\rho_\alpha\}$ の とり方に よらないこと

$\{V_\beta\}$, $\{\tau_\beta\}$: 別の choice

$\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha\omega \cap \mathrm{Supp}\,\tau_\beta \neq \phi$

なる β は有限

$$\sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_M \Big(\sum_\beta \tau_\beta\Big) \rho_\alpha \omega$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \sum_\beta}_{\text{和は有限}} \int_M \underbrace{\tau_\beta \rho_\alpha \omega}_{U_\alpha \cap V_\beta}$$

$$= \sum_{\beta} \int_M \rho_\beta \omega \qquad //$$

例

$\omega \in \Omega^k(M)$

$S \subset M$ k次元 部分多様体、向き付けられている

$\underline{\mathrm{Supp}\,\omega \cap S}$ が コンパクト とする　　$\int_S \omega := \int_S i^*\omega$ と定める

$\Updownarrow$

Supp $i^*\omega$ が コンパクト

但し $i : S \hookrightarrow M$ は包含写像

向きと最高次微分形式

Mの向き　各点 $p \in M$ に対し T_pM の向きが定まり
"pについて 連続に動く"

↑ とある座標について
一定になっている
$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\rangle$

$$T_pM \text{ の向き} \underset{1\ 1}{\Longleftrightarrow} T_p^*M \text{ の向き} \underset{1\ 1}{\Longleftrightarrow} \Lambda^m T_p^*M \text{ の向き}$$

$m = \dim M$

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle}_{\text{正の基底}} \longleftrightarrow \langle dx_1, \cdots, dx_m \rangle \longleftrightarrow dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

定義　M^m : 向き付けられた多様体 (oriented mfd)

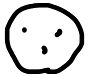
$\omega \in \Omega^m(M)$ が Mの体積形式 (volume form) とは

$\forall$ 正の座標系 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ に対して

$$\omega = f(x_1, \cdots, x_m) \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m}_{正}$$ と表示するとき

$f(x_1, \cdots, x_m) > 0$ が成立すること.

定理 向き付けられた $\underbrace{\text{多様体}}_{\text{第2可算公理をみたす}}$ は volume form を持つ



$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha \qquad (U_\alpha : x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha) \ \underline{\text{正の座標系}}.$$

1の分割 $\{\rho_\alpha\}$
$$\begin{cases} 0 \leq \rho_\alpha(x) \leq 1, \quad \rho_\alpha \ M \to \mathbb{R} \ C^\infty\text{級} \\ \mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \subset U_\alpha \\ \mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \ \text{locally finite} \\ \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \end{cases}$$

$\sum \rho_\alpha \, dx^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^\alpha$

$$\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m}$$ とおけば よい.

$(x_1^\beta, \cdots, x_m^\beta)$ で表示しても 正の係数

定理 （M: 第2可算）

M が向き付け可能 $\iff$ $^\exists \omega \in \Omega^m(M)$

s.t. ω は至る所消えない
(nowhere vanishing)

$^\forall p \in M$ に対して $\omega_p \neq 0$

M の向き $\underset{1\ 1}{\longleftrightarrow}$ 至る所消えない
m-form ω の同値類

$\omega \sim \omega' \iff {}^\exists f\ M \to \mathbb{R}_{>0},\ \omega' = f\omega$

∵ (⟹)・ volume form をとる

(⟸) 各 $p \in M$ に対して $\omega_p \neq 0$ は $\Lambda^m T_p^* M$ の向き

と定め T_pM の向きを定める

を定め、 T_pM の向きを定める.

- 局所的に正の座標系がとれること

$p \in M$ の座標近傍 $(U, x_1, \dots, x_m)$ をとって

$\omega = \underbrace{f(x)}_{} dx_1 \wedge \quad \wedge dx_m$ と表示、 $f(x) \neq 0$

必要なら x_1 を $-x_1$ でおきかえて $f(p) > 0$ としてよい

U を小さくとり直せば U 上で $f > 0$ としてよい

$\rightsquigarrow$ $\forall q \in U$ に対して (T_qM の向きの定め方から)

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_q$ は正の基底

//

Stokesの定理

- Greenの定理
- Gaussの発散定理 $\int \mathrm{div}\, A \, dV = \int A \cdot \vec{n} \, dS$

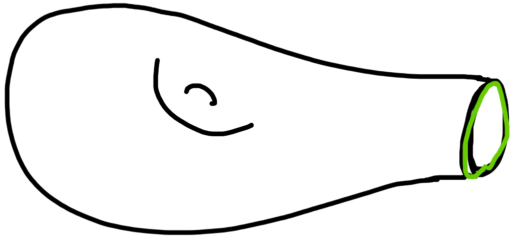
・ Gauss の発散定理 $\int_{\substack{\Omega \\ \cap \\ \mathbb{R}^3}} \mathrm{div}\, A\, dV = \int_{\partial\Omega}$

一般次元に拡張

・ Stokes の定理

$$\int_{\substack{D \\ \uparrow \\ \text{曲面}}} \mathrm{rot}\, A \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial D} A \cdot d\vec{l}$$

境界付き多様体 M^m

$\Sigma =$ 

$\partial\Sigma = S^1$

$D^3 = \{ x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \}$ 3次元閉球体

$\partial D^3 = S^2$

ω M 上の C^∞ 級 $(m-1)$-form, $\mathrm{Supp}\,\omega$ コンパクト

$$\Rightarrow \boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

つまり 積分のペアリングの下で d と ∂ は 随伴 (adjoint)

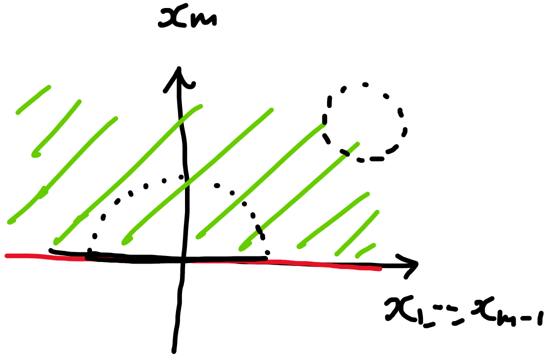
$$f \quad \underset{\uparrow}{V} \to \underset{\uparrow}{W} \qquad \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$$

内積

境界付き多様体 (manifold with boundary)

$$\mathbb{H}^m = \{ (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geqq 0 \}$$

$$\partial \mathbb{H}^m = \{ (x_1, \cdots, x_{m-1}, 0) \in \mathbb{R}^m \}$$



局所的に $\mathbb{H}^m$ の open set と同相な位相空間

↑ $\mathbb{R}^m$ からの相対位相

定義 　m次元境界付き位相多様体とはハウスドルフ位相空間 M で

$\forall p \in M$ が $\mathbb{H}^m$ の open set と同相な開近傍をもつもの

$$\begin{tikzcd} p \in U \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cap\ \text{open}"] & U' \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{H}^m \\ M \end{tikzcd}$$

・境界付き C^∞級多様体 　・座標変換が C^∞級になるアトラスが与えられたもの

C^∞級の定義 　$A \subset \mathbb{R}^m$ subset

$f : A \to \mathbb{R}$ が点 $x \in A$ で C^∞級

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \exists\, U_x & x \text{ の } \mathbb{R}^m \text{ での open nbd} \\ \exists\, \tilde{f}_x : U_x \to \mathbb{R} & C^\infty \text{級関数} \end{cases}$$

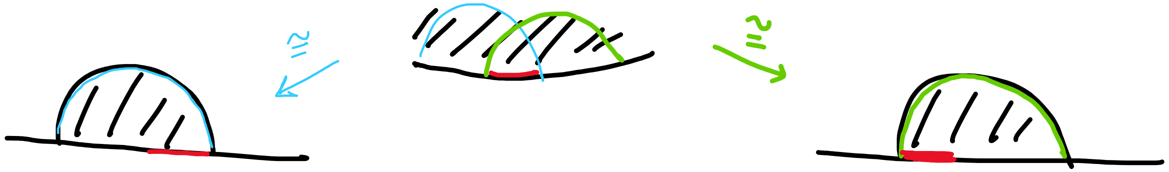
$$\text{s.t.} \quad f|_{A \cap U_x} = \tilde{f}_x|_{A \cap U_x}$$

Mの境界

$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha \qquad \varphi_\alpha\ U_\alpha \xrightarrow{\cong} \underset{\text{open}}{U'_\alpha} \subseteq \mathbb{H}^m$$

$$\partial M = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\partial \mathbb{H}^m)$$ を Mの境界という.

- $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ は $\partial \mathbb{H}^m$ の点を $\partial \mathbb{H}^m$ の点に移す (演習)



⇝ ∂Mの定義はアトラスのとり方によらない

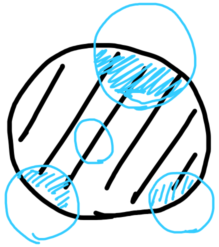
・ ∂M には $\partial U_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\partial \mathbb{H}^m) \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} \underset{\mathbb{R}^{m-1}\text{の open set}}{\underline{U'_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^m}}$

を座標とする（境界のない）C^∞級多様体の構造が入る

$$\partial(\partial M) = \emptyset \quad \left(\text{cf. } d(d\omega) = 0 \right)$$

例 $D^{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq 1 \right\}$

は境界付き C^∞級多様体 で $\partial D^{n+1} = S^n$



∂M に誘導される向き

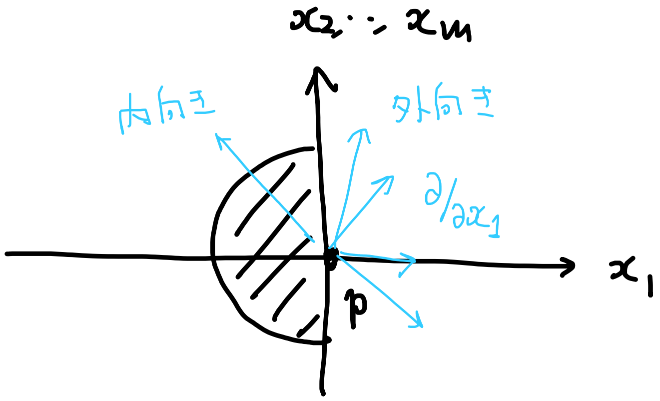
M^m: 向き付けられた境界付き多様体

$p \in \partial M$ のまわりでの局所座標 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ を次のようにとる

① U は座標によって $\{(x_1, \cdots, x_m) \mid x_1 \leqq 0\}$ の open set と同一視される

{ x_1 と x_m をとりかえて
さらに符号をかえる

② $(x_1, \cdots, x_m)$ は 正の座標系



このとき $(x_2, \cdots, x_m)$ を $U \cap \partial M$ の正の座標 とする向きが ∂M に定まる

- 接空間の言葉でいうと

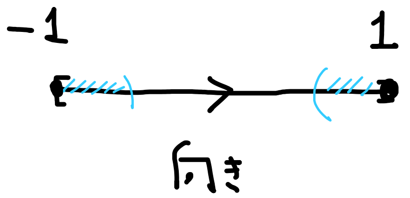
$$T_pM = \left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p}_{\substack{\text{外向きの}\\ \text{法ベクトル}\\ \text{(outward normal)}}}, \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p}^{T_p(\partial M)\text{ の向き}} \right\rangle$$

境界付き多様体に対しても
接空間が方向微分の空間
として定義できる

$$T_pM\text{の向き} = \left(\text{外向き法ベクトル}\right) \oplus \left(T_p(\partial M)\text{ の向き}\right)$$

が成立するように ∂M に向きが入る

㊟ $m=1$ のときは 上のような座標は必ずしもとれない

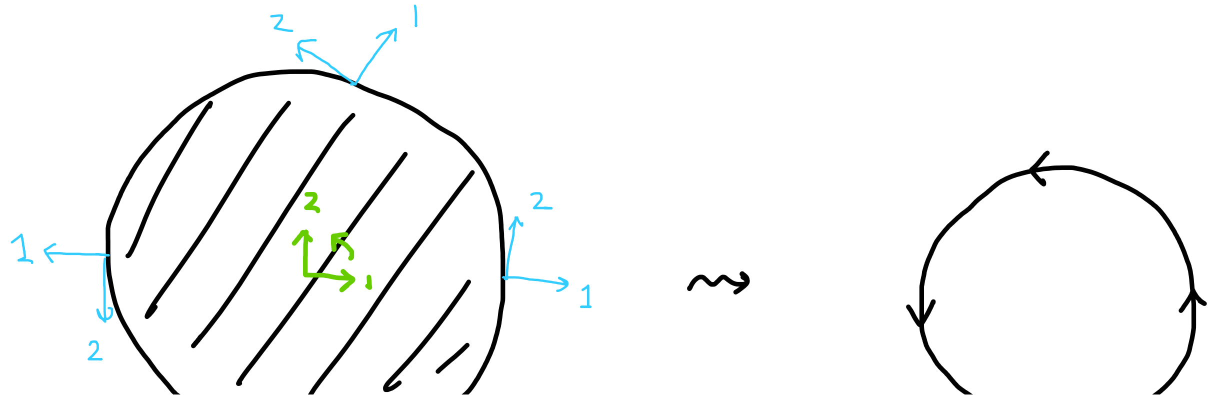


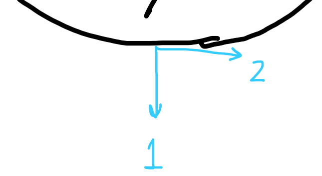
$$T_p(\partial M) \text{ の向き} = \begin{cases} 1 & \text{外向き法ベクトル} = \text{向き} \\ -1 & \text{外向き法ベクトル} \neq \text{向き} \end{cases}$$

㊀例 $S^n = \partial D^{n+1}$ は向き付けられる

標準的な向き

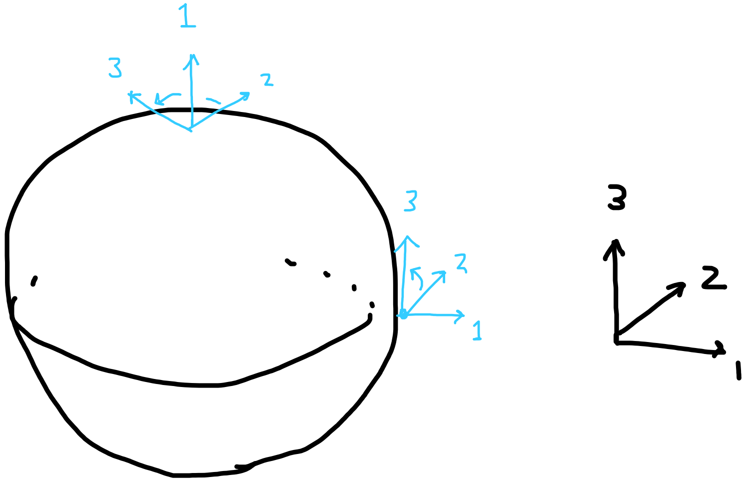
$\underline{n=1}$





境界の向き

n = 2



Stokes の定理

- M^m : 向き付けられた 境界付き C^∞級 多様体
- $\omega \in \Omega^m(M)$ $(m-1)$-form

Supp ω が コンパクト とする

$$\Rightarrow \int d\omega = \int \boxed{\omega}$$

← ω の ∂M への制限

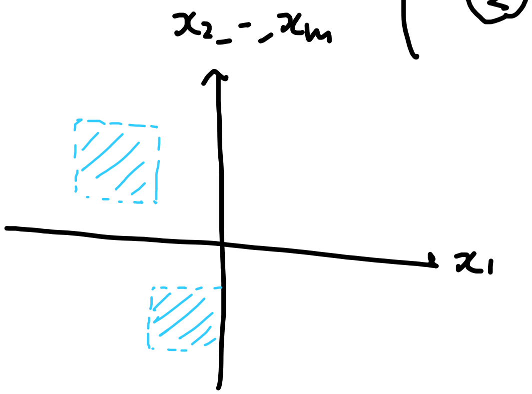
$\int_M \qquad \int_{\partial M}$

↑ 誘導される向き

∵ $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ $(U_\alpha : x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)$ は 正の座標近傍

① U_α は 座標によって $\{x_1^\alpha \leqq 0\}$ の open set と 同一視

② 必要なら U_α を小さくとり直して



$$U_\alpha \underset{\text{座標により}}{\cong} ((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)) \cap \{x_1^\alpha \leqq 0\}$$

とによい

ρ_α : $\{U_\alpha\}$ に対応する 1の分割 $\quad \mathrm{Supp}\, \rho_\alpha \subset U_\alpha$

$$d\omega = \sum_{\alpha} d(\rho_\alpha \omega)$$ ← 有限和 $\mathrm{Supp}\,\omega \cap \mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \neq \phi$ なる α をわたる

より $$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha \omega)$$

‖(?)

一方、 $$\int_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega$$

より各 α ごとに $$\int_M d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega$$ を示せばよい

- つまり ω の台が1つの座標近傍 U_α に含まれる場合に示せばよい.

$$\omega = \sum^{m} f(x)\, dx^\alpha \wedge \cdots \wedge \check{dx_i^\alpha} \wedge \cdots \wedge dx_m^\alpha$$ と表示する

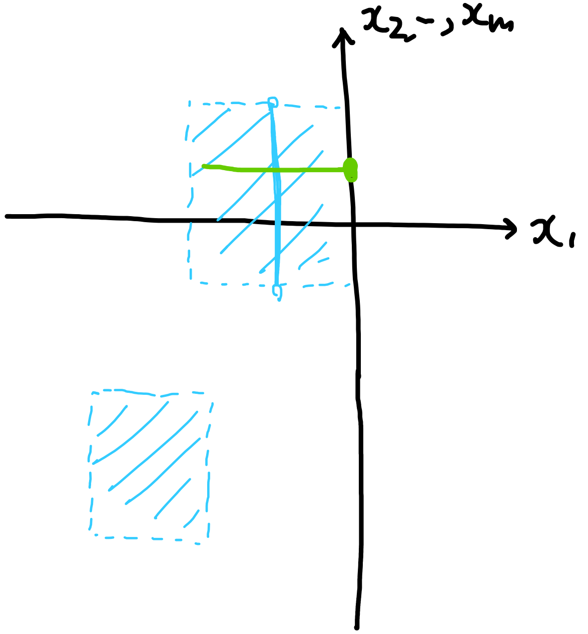
$$\omega = \sum_{i=1} f_i(x)\ dx$$

$$f_i \in C_c^\infty(U_\alpha)$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\ (-1)^{i-1}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \int_{U_\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\ dx_1 \cdots dx_m$$

$i \neq 1$ に対しては f_i は
コンパクト台ゆえ x_i で積分
すると消える



$$= \int_{U_\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ dx_1 \cdots dx_m$$

$$= \int \int \underline{f_1(0, x_2, \ldots, x_m)\ dx_2 \cdots dx_m} \qquad U_\alpha \cap \partial M \neq \phi$$

$U_\alpha \cap \partial M$ $\quad \|$

0 $\quad \omega|_{\partial M}$ $\quad U_\alpha \cap \partial M = \phi$

$$\omega = \sum f_i \, \underline{dx_1} \wedge \cdots \wedge \check{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$x_1 = 0$ に制限すると

$$\omega\Big|_{x_1=0} = f_1 \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$= \int_{\partial M} \omega$$

//

系

$\partial M = \phi$ のとき ω : コンパクト台

$$\int_M d\omega = 0$$

応用

K^k : コンパクト向き付けられた多様体

M^m : mfd, $\omega \in \Omega^k(M)$

$f: K \to M$ C^∞ map $\int_K f^*\omega$ が定まる

↑

$d\omega = 0$ なら f を変形してもこの積分値はかわらない

定理 $F: K \times [0,1] \longrightarrow M$ C^∞ map

$f_t(x) = F(x, t)$ とおく

$d\omega = 0$ ならば $\int_K f_0^*\omega = \int_K f_1^*\omega$

∵

$$0 = \int_{K\times[0,1]} dF^*\omega = \pm\left(\int_{K\times\{1\}} F^*\omega - \int_{K\times\{0\}} F^*\omega\right)$$

∥ ↑

境界付き
多様体

$F^*(d\omega)$
$\parallel$
0

Stokes

$\partial(K \times [0\ 1]) = K \times \{1\}$
$\cup\ K \times \{0\}$

$$= \pm \left(\int_K f_1^* \omega - \int_K f_0^* \omega \right) \quad //$$